

**INSTITUTO SUPERIOR POLITÉCNICO JOSÉ A. ECHEVERRÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**MÉTODOS EXPERIMENTALES PARA LA DETERMINACIÓN DE TENSIONES
MECÁNICAS.**

Monografía

Dr. Carlos Novo Soto

2004

TEMA 1.- INTRODUCCIÓN.

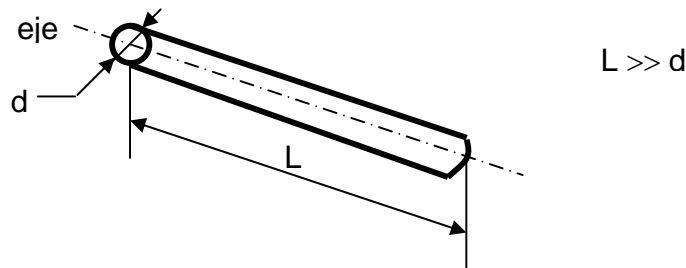
1.1.- Objetivos.

El **objetivo** fundamental de la Resistencia de Materiales es:

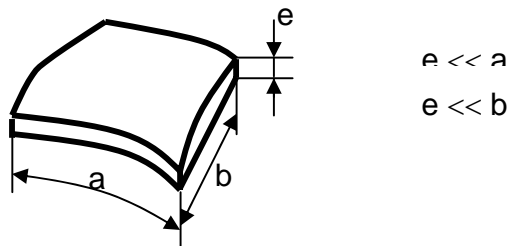
Comprobar y diseñar en base a las condiciones de resistencia, rigidez y estabilidad sistemas con configuraciones típicas sometidos a regímenes de cargas estáticos y dinámicos.

De hecho el **objeto de estudio** son los sistemas conformados por sólidos o elementos que presentan **configuraciones típicas**, entendiéndose por configuraciones típicas la **barra** y la **bóveda**.

La barra se caracteriza por ser un elemento donde una de sus dimensiones es mucho mayor que las dos restantes



En tanto la bóveda es el elemento donde una de sus dimensiones (el espesor) es mucho menor que las dos restantes.



1.2.- Sistema real y modelo.

La complejidad en el estudio del comportamiento del sólido deformable, a través de la Teoría de la Elasticidad, ha motivado que para determinar las tensiones y deformaciones en los cuerpos, dentro del campo de la ingeniería, se recurra a un conjunto de hipótesis simplificadoras, las que han demostrado en la práctica su validez, dando origen a la conocida disciplina de Resistencia de Materiales.

Entre las hipótesis más importantes y generales se encuentran:

- **La homogeneidad de los materiales**
- **La isotropía de los materiales**
- **La continuidad de los cuerpos**
- **La nulidad de las tensiones residuales**
- **La invariabilidad de las dimensiones originales de los cuerpos**
- **El principio de superposición**
- **El principio de Saint Venant**

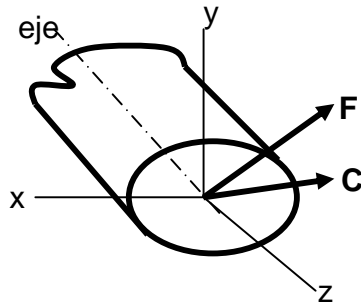
A partir del cumplimiento de estas hipótesis, introduciendo las “**configuraciones típicas**” a los cuerpos estudiados y simplificando el sistema de cargas actuantes es que se modela la realidad, transformando el sistema real en el esquema de análisis o **modelo**.

Para cumplimentar el objetivo de la Resistencia de Materiales resulta imprescindible identificar el o los puntos más peligrosos del sistema para aplicando en ellos las condiciones de resistencia, rigidez y estabilidad poder comprobar y diseñar. Sin embargo, para definir el punto más peligroso es necesario comenzar por determinar la sección más cargada y la más peligrosa lo que requiere de un adecuado dominio de los conceptos de fuerzas externas e internas.

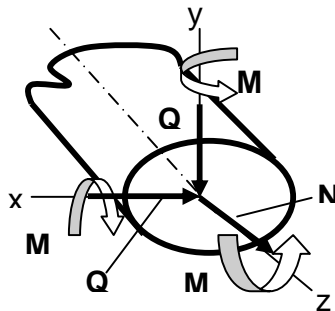
1.3.- Fuerzas externas e internas.

Se entiende por **fuerzas externas**, tal y como se sabe de la Mecánica Teórica, a aquellas que actúan externas al cuerpo libre del sistema para mantener el equilibrio del mismo, sin embargo las **fuerzas internas** son las que actúan en el **corte imaginario** de un cuerpo que garantiza su equilibrio.

Se comenzará por clasificar las fuerzas internas, para lo cual es necesario precisar las características del sistema de referencia empleado, éste se caracteriza por ser un sistema de ejes rectangulares, centroidales y principales, donde el eje “z” resulta tangente al eje de la pieza, como se muestra a continuación en un sólido en equilibrio.



Al descomponer las fuerzas internas resultantes (F_R y C_R) en el sistema de referencia, considerando en lugar de los vectores momentos componentes los correspondientes giros en cada eje, se tendrá:



Donde cada una de las fuerzas internas reciben la denominación por el efecto que provocan sobre la pieza:

N: Fuerza normal o axial de tracción o compresión.

Q_x, Q_y: Fuerza cortante en la dirección del eje x o del eje y.

M_x, M_y: Momento flector respecto al eje x o al eje y.

M_t: Momento torsor.

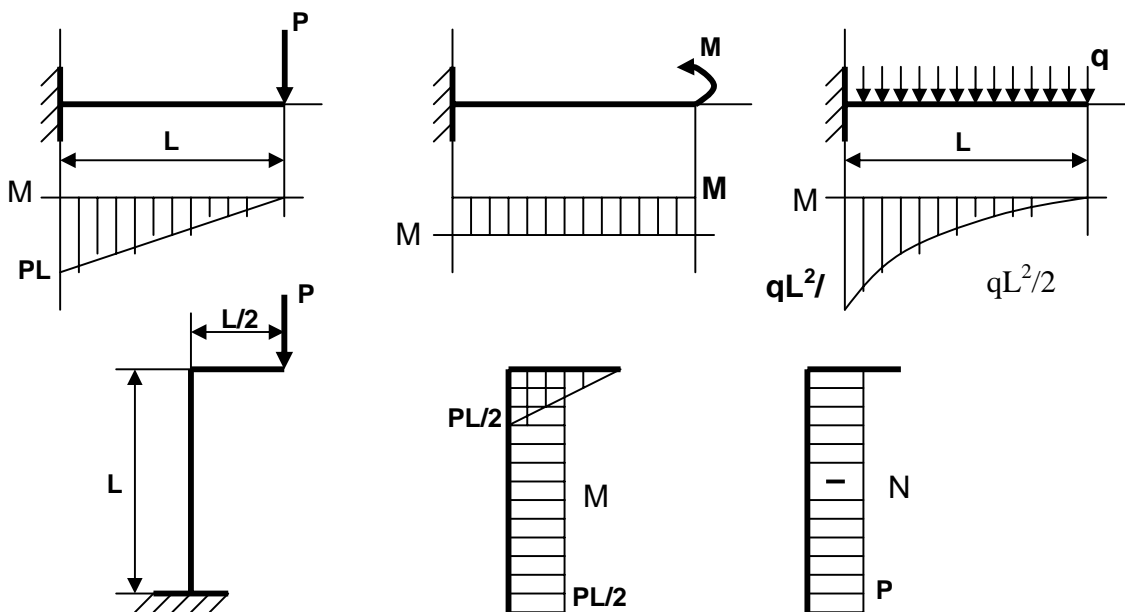
Cada una de dichas fuerzas o momentos cuando actúan por separado en la sección provocan los estados de **TRACCIÓN, COMPRESIÓN, CORTANTE, FLEXIÓN** y **TORSIÓN**, respectivamente. Para obtener de forma efectiva los gráficos de fuerzas internas es necesario teniendo ciertos **conocimientos previos** aplicar una adecuada **metódica**. A continuación se relacionan los conocimientos previos y se indica la metódica a seguir en la construcción de dichos gráficos:

- Conocimientos previos:**
- Gráficos típicos
 - Tipo de fuerza interna que se genera en el sistema por la posición de la fuerza externa respecto al eje del elemento estudiado
 - Principio de superposición

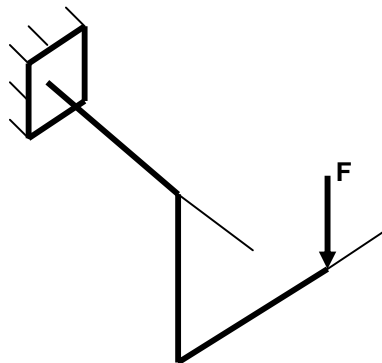
- Metódica:**
- Obtención de las reacciones en articulaciones y simples apoyos. Colocándolas en sus correctos sentidos.
 - Definición de los tramos y su orden de recorrido.
 - Construcción de los gráficos

Seguidamente se ahondarán en los conocimientos previos.

Gráficos típicos



Fuerzas internas generadas a partir de la posición relativa de las fuerzas externas "F" respecto al eje del elemento "B"



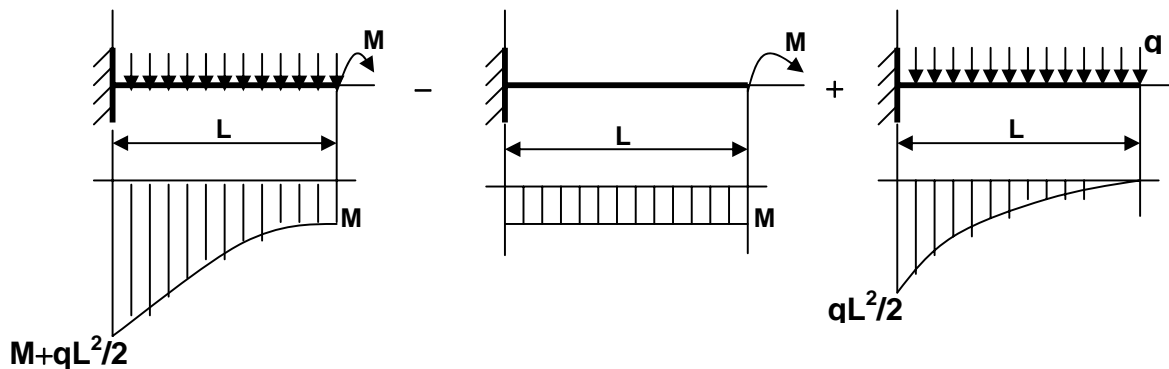
F coincide con $B \Rightarrow N$ cte

$F \perp B$ y la corta $\Rightarrow M_F$ lineal

$F \parallel B \Rightarrow N$ cte; M_F cte

$F \perp B$ y la cruza $\Rightarrow M_F$ lineal; M_T cte

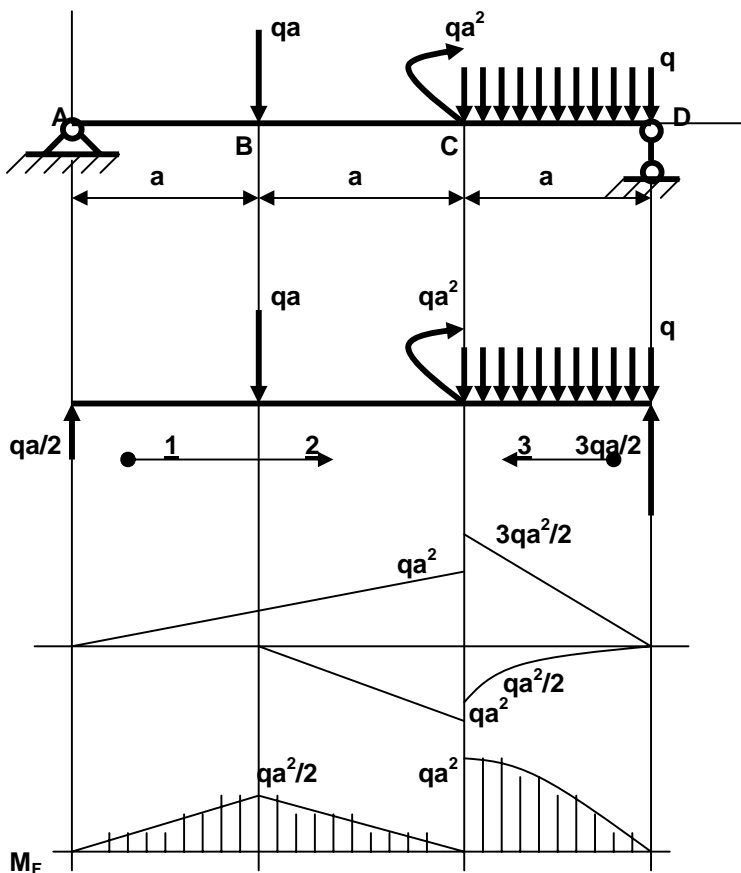
Principio de superposición

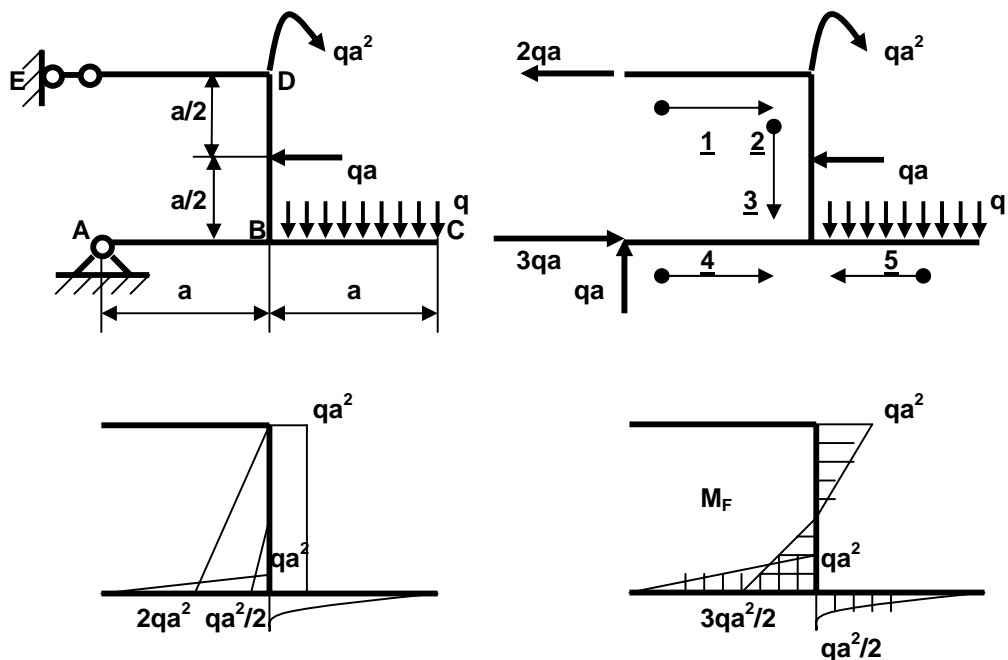


Es decir que **el efecto de la resultante es igual a la suma de los efectos de las componentes**

A continuación a través de dos ejemplos, aplicando los conocimientos previos y la metodología propuesta se determinarán los gráficos de fuerzas internas en una barra articulada y simplemente apoyada y posteriormente se obtendrán las fuerzas internas en un pórtico plano.

Ejemplos.



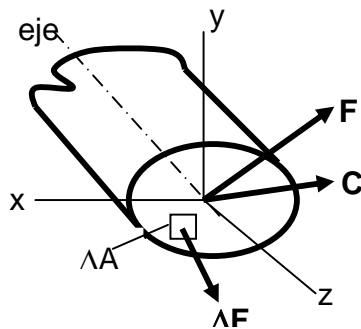


A partir de los gráficos de fuerzas internas es posible definir las secciones más cargadas y en ellas determinar los puntos más peligrosos, mediante la determinación de los esfuerzos y desplazamientos en dichos puntos.

1.4.- Esfuerzos y desplazamientos. Condición a resistencia y rigidez.

Se define el **esfuerzo promedio** p_m como la relación incremento de fuerza ΔF entre el incremento de área ΔA , es decir:

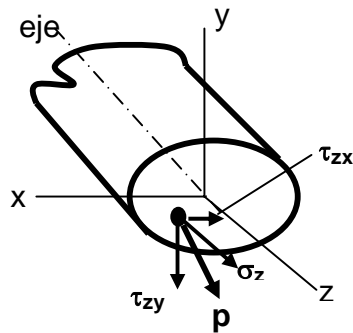
$$p_m = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$



De forma tal que en el límite, el esfuerzo p en el punto será:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} p_m = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

Este esfuerzo p en el punto puede descomponerse en las tres direcciones del sistema de referencia, dando origen al **esfuerzo normal** σ_z , perpendicular a la sección o corte imaginario transversal, y a los **esfuerzos tangenciales** a la sección transversal τ_{zx} y τ_{zy} .



Pudiendo establecer ahora que la **condición a resistencia** se expresa de la forma:

$\sigma_{m\acute{a}x} \leq [\sigma]$ cuando en el punto más peligroso sólo actúa esfuerzo normal.

$\tau_{m\acute{a}x} \leq [\tau]$ cuando en el punto más peligroso sólo actúa esfuerzo tangencial.

$\sigma_{eq} \leq [\sigma]$ cuando en el punto más peligroso actúan esfuerzos normales y tangenciales.

Donde:

$[\sigma]$ y $[\tau]$ son los esfuerzos admisibles o permisibles que dependen del comportamiento del material.

La **condición de rigidez** se encuentra asociada a los desplazamientos de forma tal que:

$\delta_{m\acute{a}x} \leq [\delta]$ cuya expresión permite analizar tanto los desplazamientos lineales como los angulares.

Siendo:

$[\delta]$ es el desplazamiento lineal o angular admisible.

Estas **condiciones a resistencia y rigidez** son las que permiten cumplir con el objetivo de la Resistencia de Materiales de **comprobar y diseñar**. Sin embargo, si ya se saben las expresiones para establecer ambas condiciones se requiere ahora saber cómo se determinan las magnitudes de los esfuerzos y los desplazamientos, por lo que a continuación en los próximos temas se estudiarán más pormenorizadamente los esfuerzos y los desplazamientos.

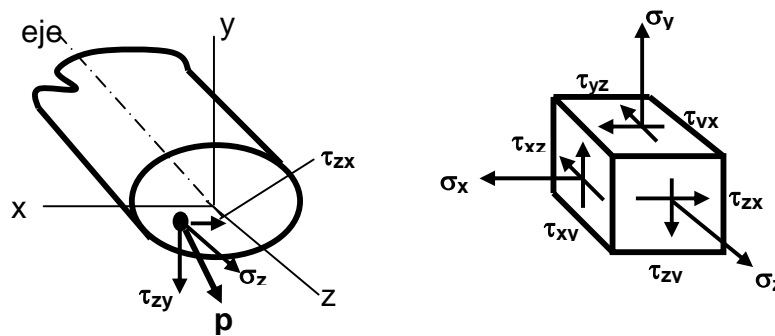
TEMA 2.- ESTADO TENSIONAL Y DEFORMACIONAL.

2.1.- Tipos de estados tensionales.

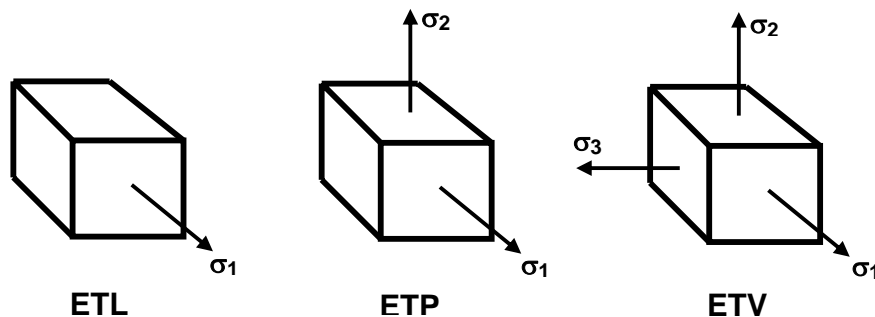
En el tema 1, al abordar la condición a resistencia, se planteó que en el caso más general, cuando en el punto más peligroso actúan esfuerzos normales y tangenciales simultáneamente resulta necesario obtener el esfuerzo equivalente, cuyo esfuerzo como se verá en el tema 3 es función de los esfuerzos principales y por lo cual se requiere saber determinar los esfuerzos principales en un punto del cuerpo, a partir de una orientación del elemento diferencial cúbico.

En el presente tema se dará a conocer las expresiones analíticas y la forma gráfica para la determinación de los esfuerzos principales.

Al estudiar en el epígrafe 1.4 los esfuerzos y desplazamientos se vió que era posible descomponer el esfuerzo \mathbf{p} en tres direcciones ortogonales, generando un esfuerzo normal y dos tangenciales, de forma tal, que para una orientación dada en el espacio siempre se obtendrán tres esfuerzos, en el caso más general, un esfuerzo normal y dos tangenciales. Por lo tanto, si rodeamos el punto analizado por un **elemento diferencial cúbico** se tendrá, en el caso más general, tres componentes de esfuerzos para cada orientación, totalizando para el elemento diferencial cúbico nueve componentes de esfuerzos, tres normales y seis tangenciales



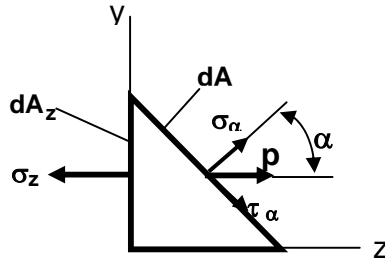
Se define que el **estado tensional es lineal (ETL)**, cuando en el elemento diferencial sólo actúa un esfuerzo normal, **plano (ETP)** cuando en el elemento diferencial sólo actúan dos esfuerzos normales y **de volumen o volumétrico (ETV)** cuando sólo actúan tres esfuerzos normales.



A continuación se obtendrán las expresiones para determinar las magnitudes de los esfuerzos normales y tangenciales para distintas orientaciones de los elementos diferenciales en los tres tipos de estados tensionales.

2.2.- Estado tensional lineal.

A partir de la condición de equilibrio del elemento diferencial:



$$\sigma_z dA_z = p dA \Rightarrow p = \sigma_z \cos \alpha$$

por otro lado, $\sigma_\alpha = p \cos \alpha$

y $\tau_\alpha = p \sen \alpha$

Sustituyendo:

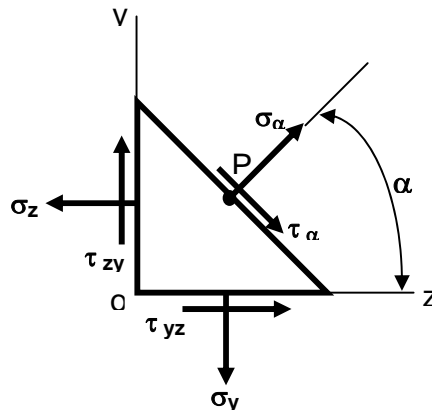
$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_z \cos^2 \alpha \\ \tau_\alpha &= \sigma_z \sen \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_z}{2} \sen 2\alpha \end{aligned}$$

Ambas expresiones para la determinación de las magnitudes de los esfuerzos normales y tangenciales muestran el carácter tensorial de los esfuerzos.

2.3.-Estado tensional plano.

Aplicando la condición de equilibrio al elemento diferencial:

$$\Sigma M_P = 0$$



se obtiene: $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, igualdad conocida como el **Principio de Paridad de los Esfuerzos Tangenciales**.

Aplicando las condiciones de equilibrio:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

se obtendrá:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha$$

2.4.- Círculo de Mohr.

Estas últimas expresiones además de mostrar el carácter tensorial de los esfuerzos pueden representarse gráficamente mediante el denominado **Círculo de Mohr**, pues de hecho ambas expresiones pueden asociarse con la ecuación de una circunferencia del tipo: $(x-a)^2 + y^2 = R^2$, como se verá más adelante.

Agrupando y elevando al cuadrado ambas expresiones,

$$\left[\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \right]^2 = \left[\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha \right]^2$$

$$\tau_{\alpha}^2 = \left[\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha \right]^2$$

Sumando dichas ecuaciones:

$$\left[\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left[\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{zy}^2$$

donde si se asocia esta última ecuación con la referida ecuación de la circunferencia, se tendrá:

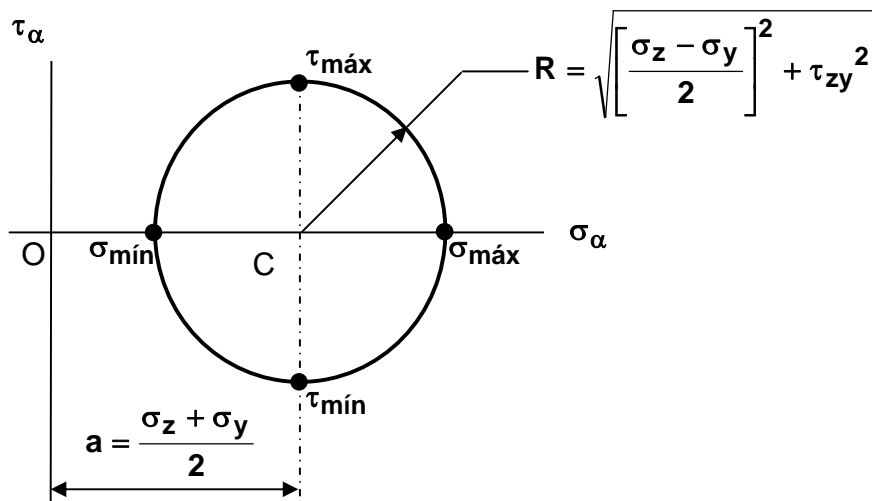
$$x \Rightarrow \sigma_{\alpha}$$

$$y \Rightarrow \tau_{\alpha}$$

$$a = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left[\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{zy}^2}$$

Pudiéndose determinar gráficamente las magnitudes de los esfuerzos, como se muestra a continuación.



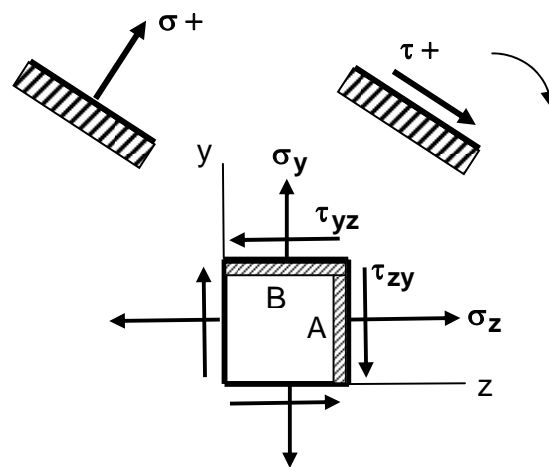
$$\sigma_{\min}^{\max} = OC + R$$

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{zy}^2}$$

$$\tau_{\min}^{\max} = \pm \sqrt{\left[\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{zy}^2}$$

Seguidamente se expondrá la metódica de obtención de los esfuerzos para diferentes orientaciones del elemento diferencial cúbico mediante la utilización del Círculo de Mohr.

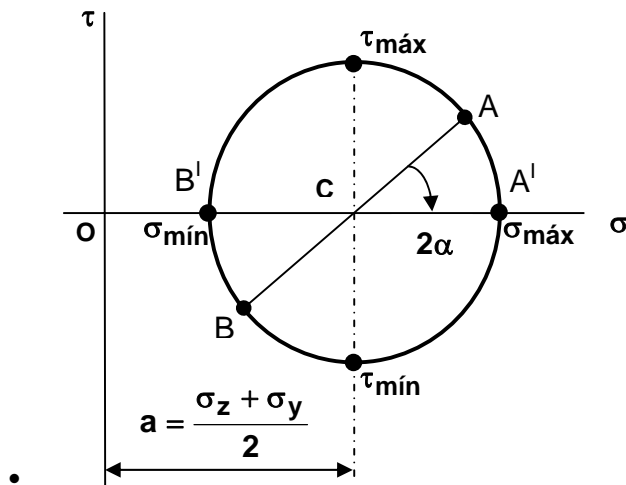
Ante todo hay que definir la convención de signos de los esfuerzos, si el esfuerzo normal σ sale de la cara el esfuerzo es positivo, si el esfuerzo tangencial τ gira respecto a la cara a favor de las manecillas del reloj es positivo, de lo contrario ambos esfuerzos serán negativos, respectivamente.



- Se seleccionan dos caras A, B, contiguas y normales del elemento diferencial.
- Se le asocian a las caras seleccionadas un par coordenado con los valores de los esfuerzos actuantes y teniendo en cuenta la convención de signo, así:

$$A \equiv (\sigma_z, \tau_{zy}) \text{ y } B \equiv (\sigma_y, -\tau_{yz})$$

- Se plotean los puntos A y B en un sistema de referencias τ vs σ
- Se unen mediante un segmento de recta los puntos A y B y donde se produzca la intersección con el eje σ queda definido el centro C de la circunferencia.
- Haciendo centro en C y pasando por A y B queda definida la circunferencia o Círculo de Mohr.



Si a partir del Círculo de Mohr se desea determinar los esfuerzos normales máximo y mínimo basta con girar la recta AB un ángulo α (recordar que en el Círculo de Mohr se representa el doble del ángulo que existe en la realidad) a favor de las manecillas del reloj hasta pasar a la nueva posición A'B' para determinar las magnitudes de los esfuerzos en cuestión. De forma similar se podrán determinar las magnitudes de los esfuerzos tangenciales máximos y mínimos.

Es de destacar que las orientaciones donde los esfuerzos normales son máximo y mínimo se denominan **planos o caras principales** y los esfuerzos normales que actúan en los mismos **esfuerzos principales**. Pudiendo ahora redefinir que:

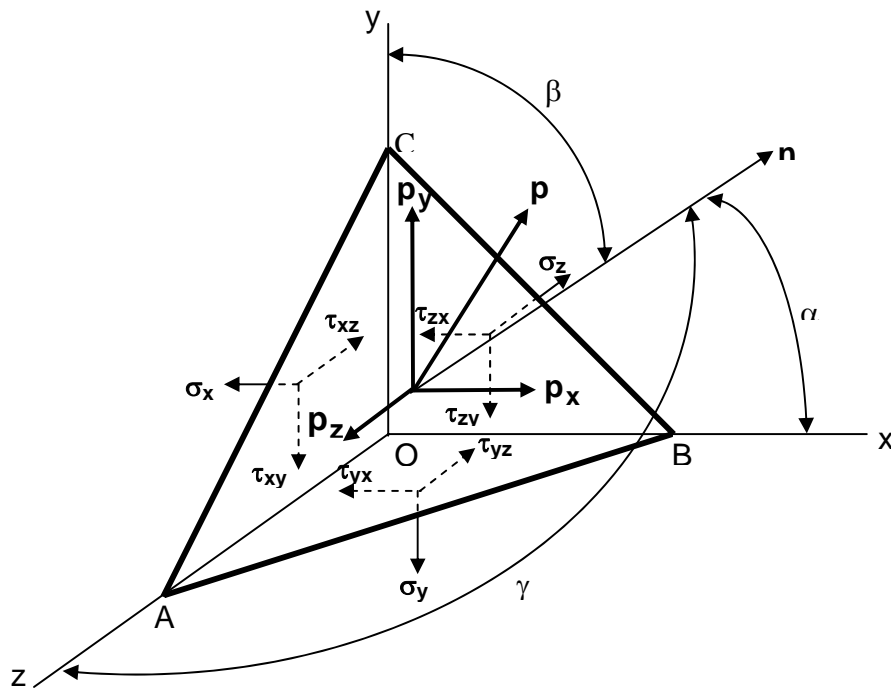
- El **estado tensional lineal** es aquel en que en el elemento diferencial cúbico sólo **actúa un esfuerzo principal diferente de cero**.
- El **estado tensional plano** es aquel en que en el elemento diferencial cúbico sólo **actúan dos esfuerzos principales diferentes de cero**.
- El **estado tensional volumétrico** es aquel en que en el elemento diferencial cúbico sólo **actúan tres esfuerzos principales diferentes de cero**.

Dichos esfuerzos principales se designan por: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ y deben cumplir con la desigualdad mostrada.

Es de señalar otro aspectos de interés que se desprenden de la observación y análisis del Círculo de Mohr:

- Se ratifica el carácter tensorial de los esfuerzos.
- La simetría del círculo respecto al eje σ corrobora el Principio de Paridad de los Esfuerzos Tangenciales en el elemento diferencial cúbico.
- En los planos donde actúan los esfuerzos principales los esfuerzos tangenciales son nulos. Por ello se define que los **planos principales son aquellos donde los esfuerzos tangenciales son nulos**.
- Entre los planos principales y los planos donde actúan los esfuerzos tangenciales máximos y mínimos siempre existen entre ellos un ángulo de 45° , respectivamente.

2.5.-Estado tensional volumétrico.



Planteando las condiciones de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

se obtendrán las expresiones:

$$p_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma$$

$$p_y = \tau_{yx} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma$$

$$p_z = \tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{zy} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma$$

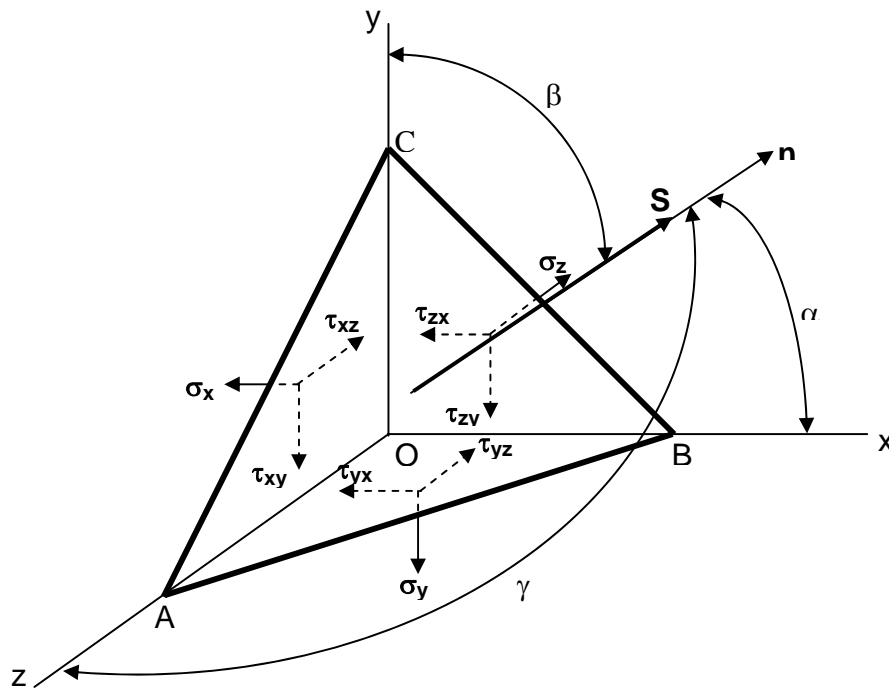
sabiendo que:

$$ABC \cos \alpha = AOC$$

$$ABC \cos \beta = AOB$$

$$ABC \cos \gamma = BOC$$

Si se desea determinar los esfuerzos principales **S**, basta con colocar el esfuerzo principal **S** en una cara principal y estableciendo nuevamente las condiciones de equilibrio de fuerzas en los tres



ejes se tendrá:

$$p_x = S \cos \alpha$$

$$p_y = S \cos \beta$$

$$p_z = S \cos \gamma$$

Sustituyendo estas ecuaciones en las expresiones generales del estado tensional volumétrico se arribará al sistema de ecuaciones homogéneas:

$$(\sigma_x - S) \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma = 0$$

$$\tau_{yx} \cos \alpha + (\sigma_y - S) \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma = 0$$

$$\tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{zy} \cos \beta + (\sigma_z - S) \cos \gamma = 0$$

cuyo sistema de ecuaciones para que tenga solución debe cumplirse que el determinante del sistema sea nulo.

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - S) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - S) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - S) \end{vmatrix} = 0$$

obteniéndose la **ecuación cúbica**:

$$S^3 - k_1 S^2 + k_2 S - k_3 = 0$$

donde:

$$k_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

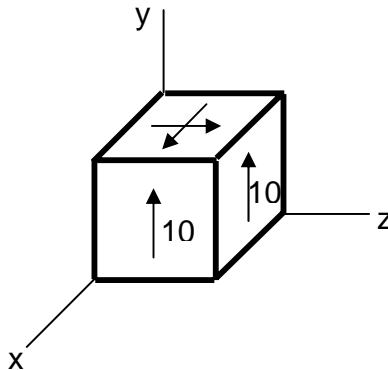
$$k_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$k_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

son los invariantes del estado tensional; como se observa de la ecuación cúbica se obtendrán tres raíces: S_1, S_2, S_3 , a partir de las cuales se determinarán los esfuerzos principales: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, que permitirán definir el tipo de estado tensional.

Ejemplo

Para elemento mostrado en la figura determine los esfuerzos principales.



Para la determinación de los esfuerzos principales se empleará la ecuación cúbica. Se sabe que:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = 10$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 10$$

A continuación se obtendrán los invariantes del estado tensional, sustituyendo los valores de los esfuerzos conocidos:

$$k_1 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$k_2 = 0 + 0 + 0 - 100 - 100 - 0 = -200$$

$$k_3 = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto: $S^3 - 200S = 0$

Obteniendo las raíces:

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = \sqrt{200} = 14,14$$

$$S_3 = -\sqrt{200} = -14,14$$

y llegando finalmente a:

$$\sigma_1 = 14,14$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -14,14$$

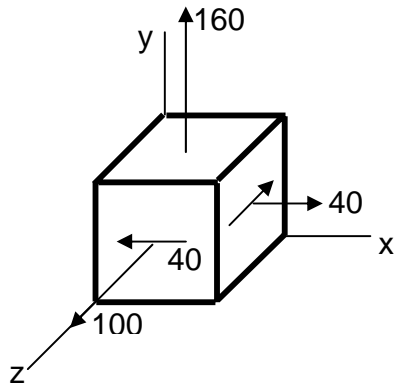
lo que permite afirmar que el elemento cúbico mostrado se encuentra sometido a un estado tensional plano.

Para obtener los esfuerzos en diferentes orientaciones del elemento diferencial cúbico y de hecho determinar los esfuerzos principales en el **estado tensional volumétrico** se puede aplicar el **Círculo de Mohr**, al igual que en el estado tensional plano, con la única diferencia que se requiere que el elemento presente **al menos un plano principal**.

Seguidamente se mostrará, a través de un ejemplo, la aplicación del Círculo de Mohr al caso del estado tensional volumétrico.

Ejemplo

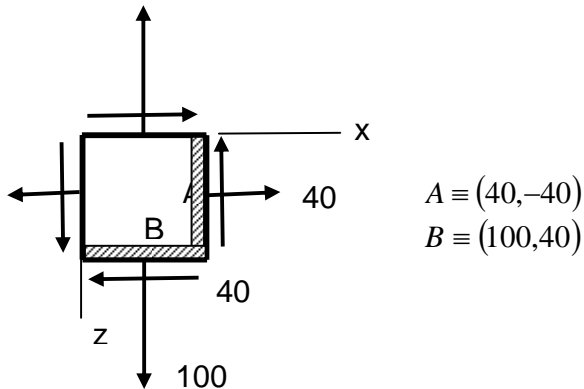
Para el elemento diferencial mostrado determine la magnitud de los esfuerzos principales.



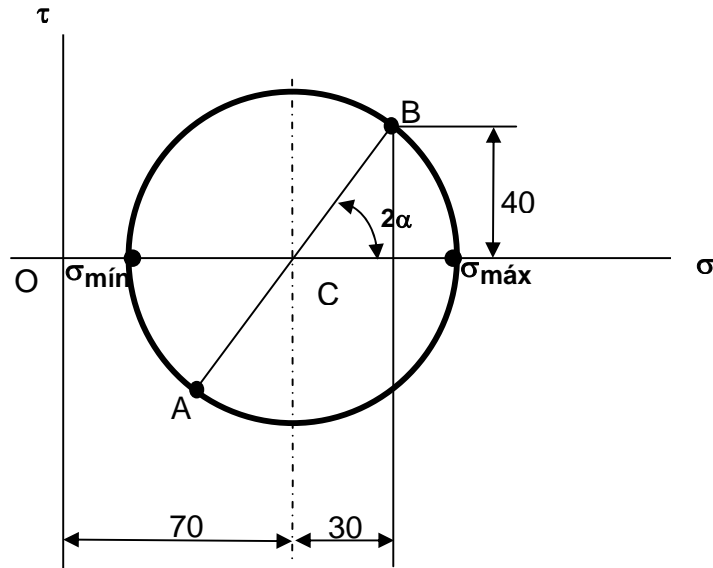
Como en el plano superior no actúan esfuerzos tangenciales, dicho plano es un plano principal, así mismo como en el elemento volumétrico analizado existe al menos un plano principal es posible determinar los esfuerzos principales aplicando el Círculo de Mohr.

Para dar solución al problema, basta observar el elemento en la dirección del esfuerzo principal $\sigma = 160$ y proyectarlo en el plano xz, normal a la dirección del esfuerzo principal.

De esta forma se estará en presencia de un elemento en el plano y por lo tanto, aplicando la metódica ya conocida del Círculo de Mohr en el estado tensional plano se podrán obtener los esfuerzos principales $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$.



Construyendo el Círculo de Mohr



$$\sigma_{\min}^{\max} = OC \pm R = 70 \pm \sqrt{30^2 + 40^2} = 70 \pm 50$$

de donde:

$$\sigma_{\max} = 120$$

$$\sigma_{\min} = 20$$

y comparando ambos valores con el esfuerzo principal inicial $\sigma = 160$ se llega a la conclusión de que:

$$\sigma_1 = 160$$

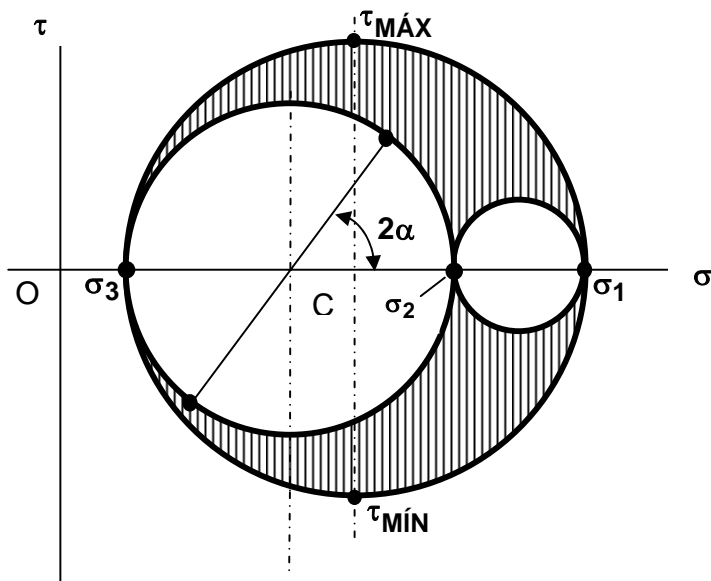
$$\sigma_2 = 120$$

$$\sigma_3 = 20$$

ya que siempre se tiene que cumplir que:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

por último se puede pasar a construir el Círculo de Mohr correspondiente al estado tensional volumétrico del elemento diferencial cúbico analizado.



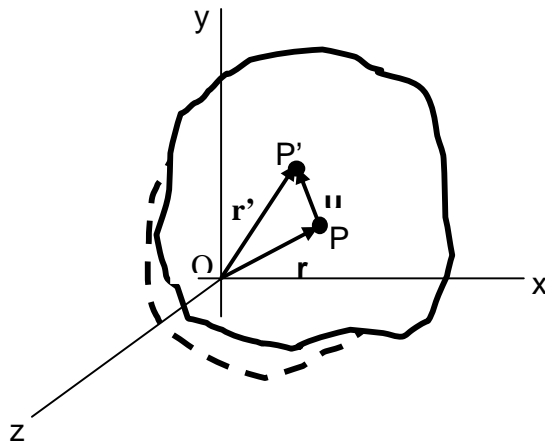
Cabe destacar que el área sombreada entre las tres circunferencias corresponden con los valores de los esfuerzos normales y tangenciales cuando al rotar el elemento diferencial se realiza respecto a ejes no principales.

De la figura, se observa que los máximos y mínimos valores de los esfuerzos tangenciales se obtienen a partir de la expresión:

$$\tau_{MÍN}^{MÁX} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

2.6.-Estado deformacional.

El vector desplazamiento \mathbf{u} es el vector que define el cambio de posición de un punto P de un sólido al deformarse bajo la acción de un conjunto de fuerzas externas.



$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$$

si por comodidad se asocian los ejes coordenados por los números 1, 2, 3 se tendrá:

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k ,$$

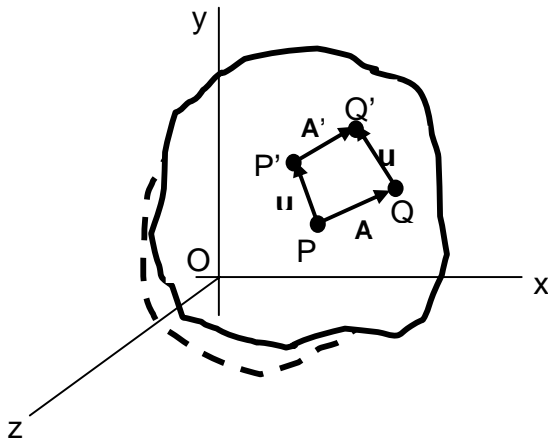
siendo,

$$u_1 = u_1(x, y, z)$$

$$u_2 = u_2(x, y, z)$$

$$u_3 = u_3(x, y, z)$$

Para abordar la interpretación física de la deformación que sufre un sólido se estudiará a continuación la variación de un segmento de recta, el que se asociará con el vector \mathbf{A} , al pasar a la nueva posición \mathbf{A}' en el sólido deformado.



$$A + u_Q = u_P + A'$$

$$\Delta A = A' - A = u_Q - u_P = \Delta u$$

Sabiendo que:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \theta_1 \Delta x + \theta_2 \Delta y + \theta_3 \Delta z$$

y que para:

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z \text{ pequeños, } \theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta_3 \approx 0$$

por lo tanto:

$$\Delta A = \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z$$

derivando parcialmente el vector \mathbf{u} ,

$$\Delta A = \frac{\partial u_1}{\partial x} \Delta x i + \frac{\partial u_2}{\partial x} \Delta x j + \frac{\partial u_3}{\partial x} \Delta x k + \frac{\partial u_1}{\partial y} \Delta y i + \frac{\partial u_2}{\partial y} \Delta y j + \frac{\partial u_3}{\partial y} \Delta y k + \frac{\partial u_1}{\partial z} \Delta z i + \frac{\partial u_2}{\partial z} \Delta z j + \frac{\partial u_3}{\partial z} \Delta z k$$

de tal forma que:

$$\Delta A = \Delta A_1 i + \Delta A_2 j + \Delta A_3 k$$

de donde:

$$\Delta A_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u_1}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u_1}{\partial z} \Delta z$$

$$\Delta A_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u_2}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u_2}{\partial z} \Delta z$$

$$\Delta A_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u_3}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u_3}{\partial z} \Delta z$$

Utilizando la notación tensorial:

$$\Delta A_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j$$

Descomponiendo el término: $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

Donde: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ representa el **tensor deformación** y $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

representa el **tensor rotación**.

Centrando la atención en el tensor deformación,

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ son las deformaciones lineales}$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \text{ son las deformaciones angulares}$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Es de destacar que en estas últimas expresiones se han relacionado los desplazamientos en la dirección del eje x con la letra **u**, en la dirección del eje y con la letra **v** y en la dirección del eje z con la letra **w**. Así mismo se cumplen las siguientes igualdades:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$$

Las conocidas distorsiones $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$

Existe una total similitud entre las expresiones del estado tensional y el estado deformacional, incluida la ecuación cúbica, así como, la posible representación del estado deformacional mediante el Círculo de Mohr, teniendo en cuenta las mismas limitaciones del estado tensional, relacionando los esfuerzos normales σ con las deformaciones lineales ε y los esfuerzos tangenciales τ con las distorsiones $\gamma/2$. Los tipos de estados deformacionales son los mismos que los del estado tensional, las direcciones de los ejes principales del estado deformacional son los mismos que los del estado tensional, pero el **tipo de estado deformacional no tiene porque coincidir con el tipo de estado tensional**.

2.7.-Ley de Hooke Generalizada.

Los ensayos a Tracción y Compresión demuestran el cumplimiento de la Ley de Hooke para un estado tensional lineal dentro del período elástico, es decir:

$$\sigma = E\varepsilon$$

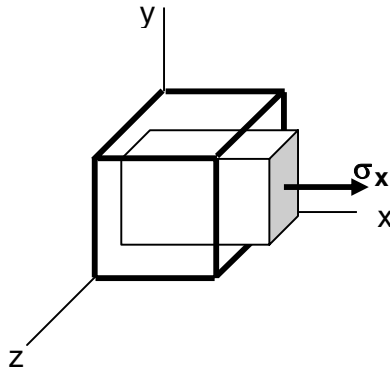
donde, σ : esfuerzo normal
 E : módulo de elasticidad
 ε : deformación lineal

Así mismo el ensayo a torsión demuestra la validez de la Ley de Hooke para la distorsión en el período elástico, la que se expresa en la forma:

$$\tau = G\gamma$$

donde, τ : esfuerzo tangencial
 G : módulo de distorsión, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
 ν : coeficiente de Poisson
 γ : distorsión

Considerando que el comportamiento del material analizado es isotrópico y que se encuentra dentro del período elástico se cumplirá el principio de superposición y por lo tanto se podrá abordar el estudio de las deformaciones que se generan en un elemento diferencial cúbico como la suma de las deformaciones que provocan cada uno de los esfuerzos por separado en el caso de los esfuerzos normales, sin embargo debido a la independencia de las distorsiones en los planos ortogonales, éstas se analizarán a partir del cumplimiento de la Ley de Hooke para la distorsión en cada plano.



Bajo las condiciones mostradas, se cumplirá que: $\varepsilon_{x1} = \frac{\sigma_x}{E}$, pero a su vez la acción de este esfuerzo provocará deformaciones en las direcciones de los ejes y, z:

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$$

$$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \text{ respectivamente.}$$

Por lo tanto, si ahora se aplica el esfuerzo normal en la dirección del eje y, ello provocará una deformación en la dirección del eje x: $\varepsilon_{x2} = -\nu\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$

Y si finalmente se aplica un esfuerzo normal en la dirección del eje z, provocará una deformación en la dirección del eje x: $\varepsilon_{x3} = -\nu\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$

Si simultáneamente actúan los esfuerzos normales en las direcciones de los tres ejes, entonces la deformación en la dirección del eje x será: $\varepsilon_x = \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2} + \varepsilon_{x3}$, o sea,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

De igual forma se obtendrán las restantes deformaciones lineales, teniendo finalmente:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Aplicando la Ley de Hooke para la distorsión:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Estas seis expresiones representan la Ley de Hooke Generalizada, cuya ley cuando se pone en función de los esfuerzos principales solamente adopta la forma:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

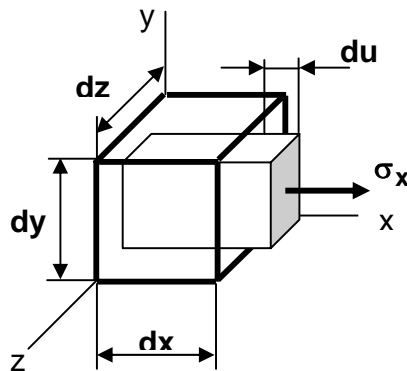
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

ya que en los planos principales se anulan los esfuerzos tangenciales. Si se observa cuidadosamente estas últimas expresiones se ratifica que el tipo de estado tensional no tiene que coincidir con el tipo de estado deformacional.

2.8.-Energía potencial de la deformación.

Antes de abordar la energía potencial de la deformación se determinará la variación unitaria de volumen, e , que es igual a la relación variación de volumen, ΔV entre el volumen, V .



$$\Delta V = (dx + du)(dy + dv)(dz + dw) - dxdydz$$

$$\Delta V = dx(1 + \varepsilon_x)dy(1 + \varepsilon_y)dz(1 + \varepsilon_z) - dxdydz \approx dxdydz(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Por lo que finalmente:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

cuya expresión coincide con el primer invariante de la ecuación cúbica del estado deformacional. Sustituyendo las deformaciones por los esfuerzos, a partir de la Ley de Hooke Generalizada, se tendrá que:

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Sin lugar a dudas, la energía potencial acumulada, dU , en el período elástico, en un elemento diferencial será igual al trabajo dT realizado por las fuerzas generadas a partir de los esfuerzos actuantes en las caras del elemento. Aplicando el principio de superposición se determinará el trabajo realizado por los esfuerzos normales y después el realizado por los esfuerzos tangenciales. Comenzando por el esfuerzo normal σ_x .

$$dT_{\sigma_x} = \frac{1}{2} \sigma_x dydzdu = \frac{1}{2} \sigma_x dydz \varepsilon_x dx$$

$$dT_{\sigma_y} = \frac{1}{2} \sigma_y dx dz dv = \frac{1}{2} \sigma_y dx dz \varepsilon_y dy$$

$$dT_{\sigma_z} = \frac{1}{2} \sigma_z dx dy dw = \frac{1}{2} \sigma_z dx dy \varepsilon_z dz$$

Similarmente:

$$dT_{\tau_{xy}} = \frac{1}{2} \tau_{xy} dx dz \gamma_{xy} dy$$

$$dT_{\tau_{yz}} = \frac{1}{2} \tau_{yz} dy dx \gamma_{yz} dz$$

$$dT_{\tau_{zx}} = \frac{1}{2} \tau_{zx} dz dy \gamma_{zx} dx$$

Como: $dU = dT_{\sigma_x} + dT_{\sigma_y} + dT_{\sigma_z} + dT_{\tau_{xy}} + dT_{\tau_{yz}} + dT_{\tau_{zx}}$

Sustituyendo: $dU = \frac{1}{2} dx dy dz (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$

Definiendo la energía unitaria de volumen, U_0 como la derivada de la energía potencial respecto al volumen:

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

cuya expresión en función de los esfuerzos y las deformaciones principales adopta la forma:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

Sustituyendo las deformaciones principales por los esfuerzos principales a partir de la Ley de Hooke Generalizada:

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]$$

Esta energía potencial unitaria U_0 es el resultado de la suma de la energía unitaria debido al cambio de volumen, U_{0V} más la energía unitaria debido al cambio de forma U_{0F} , es decir:

$$U_0 = U_{0V} + U_{0F}$$

Siendo las expresiones de estas componentes de la energía unitaria en función de los esfuerzos principales iguales a:

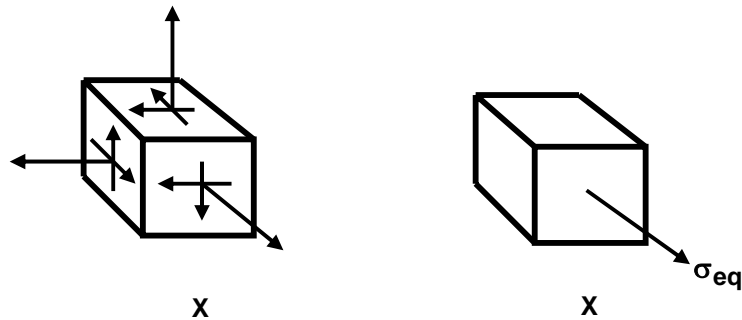
$$U_{0V} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$U_{0F} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

TEMA 3.- CRITERIOS DE RESISTENCIA.

3.1.- Esfuerzo equivalente.

Como ya se sabe, cuando en el punto más peligroso de un cuerpo actúan simultáneamente esfuerzos normales y tangenciales, la condición a resistencia se establece a partir del esfuerzo equivalente σ_{eq} , que no es más que el esfuerzo que hay que aplicar en un punto de una pieza sometida a tracción para que produzca la misma peligrosidad, X , que la correspondiente a un punto de un cuerpo sometido a un estado complejo.



Para determinar la expresión del esfuerzo equivalente es que se utilizan los **criterios de resistencia**, estos esfuerzos equivalentes se expresarán en función de los esfuerzos principales, de aquí la importancia del tema 2 que da a conocer cómo a partir de los esfuerzos normales y tangenciales en un elemento es posible obtener los esfuerzos principales. A continuación se expondrán los criterios de resistencia fundamentales.

3.2.-Teorías fundamentales de resistencia.

El surgimiento de las teorías o criterios de resistencia está íntimamente vinculado al desarrollo histórico de la Resistencia de Materiales, así en la medida en que más se conocía del comportamiento de los materiales, nuevas hipótesis se planteaban, las que al mostrar su validez en la práctica pasaron a ser las conocidas teorías o **criterios de resistencia**. De todo lo anterior se desprende que estos criterios de resistencia están directamente vinculados a personalidades, que han hecho aportes significativos en la Resistencia de Materiales. Así en orden histórico se tiene:

- **Teoría de Galileo** o del esfuerzo normal máximo.

$$\sigma_{eq} = \sigma_1$$

- **Teoría de Mariotte & Saint Venant** o de la deformación lineal máxima.

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_1$$

$$\frac{\sigma_{eq}}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

- **Teoría de Coulomb** o del esfuerzo tangencial máximo.

$$\tau_{eq} = \tau_{MÁX}$$

$$\frac{\sigma_{eq}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3$$

- **Teoría de Huber & Mises** o de la energía potencial unitaria debido al cambio de forma.

$$U_{0F_{eq}} = U_{0F}$$

$$\frac{1+\nu}{6E} 2\sigma_{eq}^2 = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

- **Teoría de Mohr** o de los estados tensionales límites.

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - k\sigma_3$$

donde:

$$k = \frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{fc}}, \text{ para materiales cuyo comportamiento es dúctil}$$

$$k = \frac{\sigma_{rt}}{\sigma_{rc}}, \text{ para materiales cuyo comportamiento es frágil}$$

σ_{ft} : Límite de fluencia a la tracción

σ_{fc} : Límite de fluencia a la compresión

σ_{rt} : Límite de resistencia a la tracción

σ_{rc} : Límite de resistencia a la compresión

De las cinco teorías de resistencia se seleccionará:

- Para **materiales que se comportan como dúctiles** con $k = \frac{\sigma_{ft}}{\sigma_{fc}} = 1$, el criterio de **Huber**

& Mises, que establece:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

- Para el **resto de los materiales** el criterio de **Mohr**, que establece:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - k\sigma_3$$

3.3.-Condición a resistencia.

Así para **diseñar y comprobar en base a la condición a resistencia** se debe cumplir que:

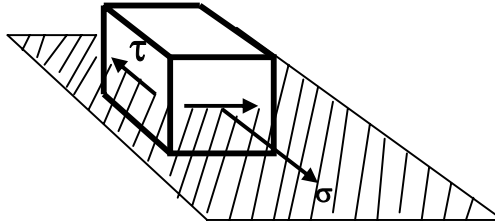
$$\sigma_{eq} \leq [\sigma]$$

donde: $[\sigma] = \frac{\sigma_{ft}}{n}$ cuando el **comportamiento del material es dúctil**

$[\sigma] = \frac{\sigma_{rt}}{n}$ cuando el **comportamiento del material es frágil**

y **n**, es el **coeficiente de seguridad**

Si en el punto más peligroso del sólido, el esfuerzo normal actúa en una sola dirección, cuya dirección se encuentra contenida en el plano donde actúan los esfuerzos tangenciales, ambos criterios se pueden expresar de la siguiente forma:



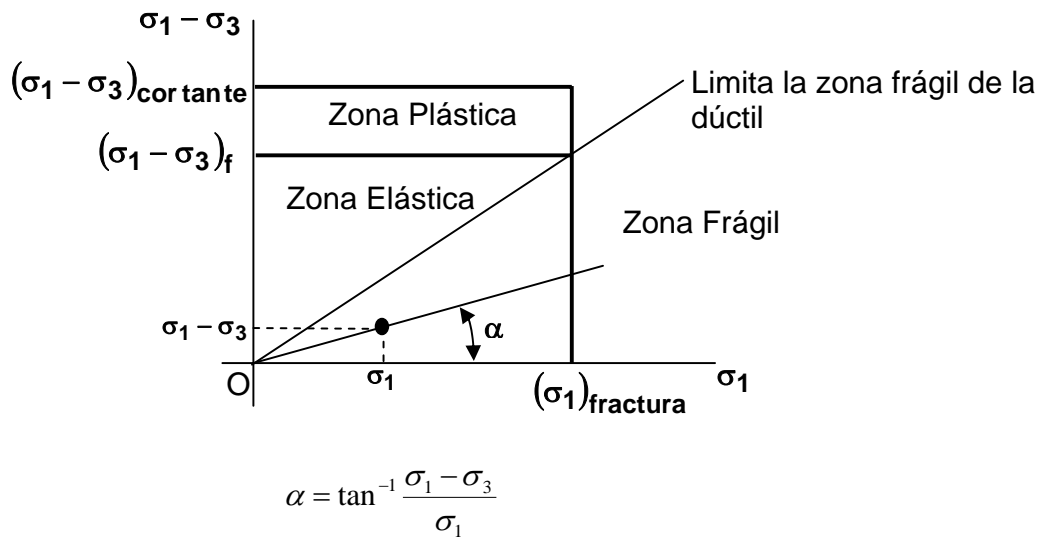
Huber & Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Mohr

$$\sigma_{eq} = \frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \leq [\sigma]$$

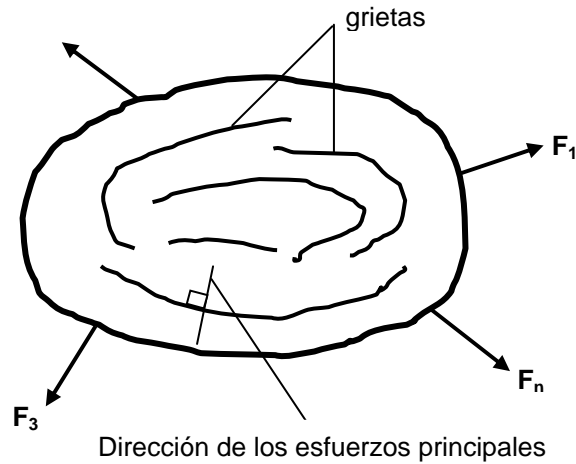
Para dar respuesta a la interrogante, ¿cuándo se sabe si el comportamiento del material es dúctil o frágil?, basta con remitirse a la **Teoría Mecánica**, la que a partir de la gráfica que se muestra, permite con la obtención del ángulo α discriminar el comportamiento dúctil o frágil del material.



De la Teoría Mecánica se arriba a la conclusión de que el comportamiento dúctil o frágil no es una propiedad del material sino que depende del estado tensional a que está sometido el material.

TEMA 4.- MÉTODO DE LA LACA FRÁGIL.

Este es uno de los métodos más sencillos para estudiar el campo de tensiones en una pieza. Consiste en cubrir la superficie de la pieza con una laca frágil, la cual fractura a determina magnitud de las acciones externas que actúan sobre la pieza. Estas fracturas conforman un campo de grietas, cuyas direcciones son perpendiculares a la dirección de los esfuerzos normales máximos de tracción, así el campo de grietas permite determinar la dirección de los esfuerzos principales.



Para determinar la magnitud de los esfuerzos para los cuales fractura la laca, a medida que se incrementan las magnitudes de las acciones externas, se cargan simultáneamente cintas metálicas calibradas del mismo material que el de la pieza y cubiertas con el mismo tipo de laca; de esta forma se pueden evaluar la magnitud de los esfuerzos que provocan la fractura de la laca sobre la pieza. Como es lógico la magnitud de los esfuerzos que provocan la fractura de la laca depende de su composición, así como de su espesor y por estar aplicada sobre la superficie de la pieza permite evaluar indirectamente la magnitud de los esfuerzos en ésta última, a partir del instante en que se generan las grietas. Es de destacar que la laca se tiene que aplicar siempre sobre la superficie limpia y sin grasa de la pieza; sin embargo como la composición fundamental de la laca está constituida por colofonia (pez rubia), ello motiva que las condiciones ambientales, principalmente la temperatura y la humedad influyen notablemente en las propiedades de la laca, provocando la baja fiabilidad de los resultados cuantitativos, sobre todo cuando no se tienen en cuenta estos factores; por ello el método de la laca frágil es sólo conveniente para la determinación de La dirección de los esfuerzos principales, debiéndose combinar con otros métodos para la valoración cuantitativa, como puede ser los métodos extensométricos, específicamente el método de la extensometría eléctrica.

TEMA 5.- MÉTODOS EXTENSOMÉTRICOS.

Este es uno de los métodos experimentales que más ampliamente se utiliza, debido a que presenta la ventaja de que la medición se realiza directamente sobre la pieza en cuestión.

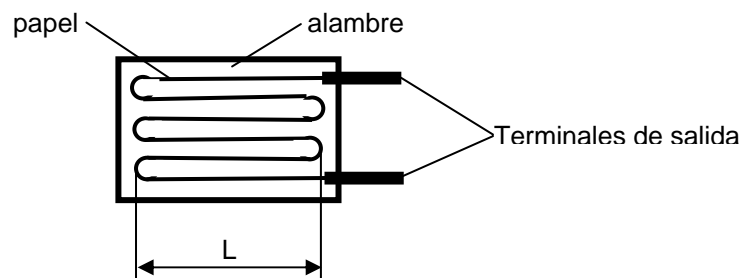
Los extensómetros son instrumentos que permiten medir las deformaciones elásticas en las superficies exteriores de las piezas y dependiendo del principio físico de funcionamiento se clasifican fundamentalmente en:

- Mecánicos
- Eléctricos
- Ópticos
- Neumáticos
- Acústicos

De ellos los que han tenido una mayor aceptación son los eléctricos dadas sus grandes posibilidades, pues sus diversos tipos permite seleccionar extensómetros de pequeñas dimensiones para fijar en lugares de difícil acceso y poder determinar deformaciones tanto en condiciones estáticas como dinámicas; no obstante presentan el inconveniente que una vez fijados a la pieza, el desmontaje conlleva su destrucción. Es por todo lo antes expuesto que se centrará el estudio en los extensómetros eléctricos.

5.1.- Características del extensómetro eléctrico.

Los extensómetros eléctricos están constituidos por un alambre fino, con un diámetro de 0,015 a 0,030 mm generalmente, cuyo alambre se encuentra inmerso en una lámina de papel especial y



posee en sus extremos alambres intermedios o terminales de salida, de mayor sección transversal con el objetivo de facilitar la conexión al equipo registrador.

El extensómetro eléctrico se pega a la superficie de la pieza, de forma tal que la base "L" coincida con la dirección en la cual se desea medir la deformación.

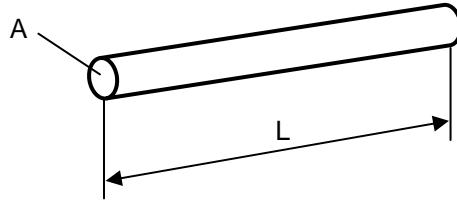
Para efectuar una adecuada fijación del extensómetro a la superficie seleccionada en la pieza se debe:

- Pulir la superficie donde se fijará el extensómetro.
- Mediante la utilización del papel de esmeril se le da una ligera aspereza para lograr una buena superficie de adhesión.
- Se elimina la grasa alcohol o gasolina y se cubre con acetona la superficie en cuestión.
- Se aplica el pegamento y se aprieta ligeramente el extensómetro contra la superficie hasta que salga por el contorno del extensómetro el pegamento en exceso y se eliminen las posibles burbujas de aire contenidas en el mencionado pegamento.
- Se sitúa un papel fino sobre el extensómetro y sobre dicho papel se coloca un pedazo de goma sobre el que se cargará un peso de 0,5 a 2 kg, durante 60 a 80 minutos.
- Una vez quitada la goma y el peso se deja secar el pegamento durante no menos de 24 horas a una temperatura de 15 a 20 °C.
- Se comprueba la resistencia del extensómetro.
- Finalmente se protege el extensómetro de la humedad por medio de una capa de cera o de goma; contra los daños mecánicos o el calor se protege con un fieltro fino.

Una vez pegado el extensómetro a la pieza el alambre se deforma, conllevando una variación de su resistencia, al deformarse la pieza. Existe una relación directa entre la variación de la resistencia del alambre y la deformación de la pieza, cuya deformación se considerará igual a la deformación que sufre el alambre del extensómetro.

5.2.- Principio de funcionamiento del extensómetro eléctrico.

Se sabe que para un segmento de conductor de longitud "L" y área transversal "A", la resistencia



"R" será:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

siendo ρ la resistividad del conductor [$\Omega \cdot \text{cm}$]

Si se considera que la resistividad ρ no varía de forma apreciable con los cambios de dimensiones del conductor, se tendrá.

$$dR = \frac{\partial R}{\partial L} dL + \frac{\partial R}{\partial A} dA$$

$$dR = \frac{\rho}{A} dL + \left(-\frac{\rho L}{A^2} \right) dA$$

$$dR = \frac{\rho L}{A} \frac{d\rho}{L} - \frac{\rho L}{A} \frac{dA}{A}$$

$$dR = \frac{\rho L}{A} \left(\frac{dL}{L} - \frac{dA}{A} \right) = R \left(\frac{dL}{L} - \frac{dA}{A} \right)$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{dL}{L} \left[1 - \frac{\frac{dA}{A}}{\frac{dL}{L}} \right]$$

pero:

$$\frac{\frac{dA}{A}}{\frac{dL}{L}} = \frac{\frac{2\pi r dr}{\pi r^2}}{\frac{2dr}{L}} = \frac{r}{L} = -2\nu$$

donde: r: es el radio de la sección transversal del conductor

v: es el coeficiente de Poisson del material del conductor

Finalmente:

$$\frac{dR}{R} = \frac{dL}{L} [1 + 2\nu] = \varepsilon k$$

donde, **k** se denomina **factor del extensómetro eléctrico**, ya que permite valorar cuánto varía la resistencia eléctrica con respecto a la deformación del extensómetro. La mayoría de los extensómetros se construyen con alambre de aleación cobre-níquel, por lo que el factor del extensómetro, será:

$$k = \frac{dR}{R \varepsilon} \approx 2 \quad dR = kR\varepsilon$$

Analizando esta expresión se arriba a la conclusión de que para lograr una buena determinación de la variación de la resistencia **dR** debe ocurrir que la resistencia **R** sea lo mayor posible, ya que la deformación ε , dentro del período elástico, siempre es muy pequeña, ello se logra con una longitud relativamente grande del alambre del extensómetro. De aquí que para mantener una longitud base "L" relativamente pequeña con una longitud relativamente grande del alambre se pliegue este último al introducirse dentro del papel especial que conforma el extensómetro.

Como ya se expresó, los extensómetros eléctricos permiten realizar tanto mediciones estáticas como dinámicas ya que responden fielmente las variaciones de resistencia **dR** a las deformaciones ε que se generan en la superficie del cuerpo, por supuesto siempre que se efectúe una correcta fijación del extensómetro a la pieza.

De lo antes mencionado se arriba a la conclusión de que si por algún medio se puede medir la relación **dR/R** que sufre un extensómetro se tendrá la posibilidad de obtener la deformación ε en la pieza, pues:

$$\varepsilon = \frac{dR}{R} = \frac{dR}{kR}$$

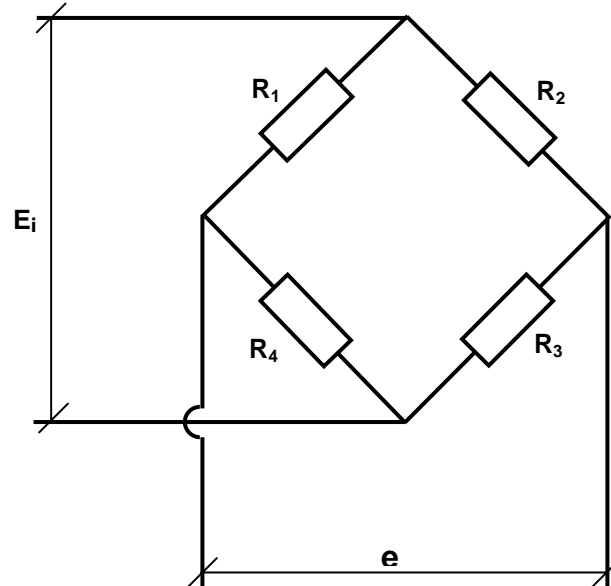
y conociendo la deformación ε se podrá obtener indirectamente el esfuerzo, así por ejemplo, para el caso del **estado tensional lineal**, si se conoce la deformación lineal ε se podrá obtener el esfuerzo normal máximo σ , utilizando la Ley de Hooke, es decir:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Finalmente se ratifica que para obtener la magnitud de los esfuerzos en la superficie de una pieza se requieren determinar las variaciones de resistencia que sufre el extensómetro fijo a la mencionada superficie, dichas variaciones de resistencia es posible registrar empleando las instalaciones eléctrica que se describirán a continuación.

5.3.- Instalación eléctrica.

El circuito base que más frecuentemente se emplea para registrar las variaciones de resistencia es el denominado **Puente de Wheatstone**, este circuito está constituido por 4 resistencias, que para



lograr que el puente esté balanceado, es decir $e = 0$, debe cumplirse que: $R_1 R_3 = R_2 R_4$. A partir de esta condición si las resistencias varían en pequeñas magnitudes, comparadas con su valor inicial, se cumplirá que:

$$e = E_i \left[\frac{R_4}{(R_1 + R_4)^2} \Delta R_1 - \frac{R_3}{(R_2 + R_3)^2} \Delta R_2 + \frac{R_2}{(R_3 + R_2)^2} \Delta R_3 - \frac{R_1}{(R_4 + R_1)^2} \Delta R_4 \right]$$

Si se considera que : $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ entonces:

$$e = \frac{E_i}{4} \left[\frac{\Delta R_1}{R} - \frac{\Delta R_2}{R} + \frac{\Delta R_3}{R} - \frac{\Delta R_4}{R} \right]$$

donde E_i es el voltaje de entrada y,
 e es el voltaje de salida

De forma tal que si sobre la superficie de una pieza se fija un extensómetro de resistencia R y se conforma un puente de Wheatstone con tres resistencias adicionales de la misma magnitud R , entonces:

$$\Delta R_2 = \Delta R_3 = \Delta R_4 = 0$$

y el voltaje de salida será:

$$e = \frac{E_i}{4} \frac{\Delta R_1}{R}$$

pero como:

$$\frac{\Delta R_1}{R} = k\varepsilon$$

Finalmente se obtendrá:

$$e = \frac{1}{4} E_i k\varepsilon$$

que es la conocida expresión del voltaje de salida para la llamada configuración **Cuarto de Puente**.

Si se emplean dos extensómetros, por ejemplo $R_1 = R_2 = R$, donde R_1 sufre variaciones positivas y R_2 negativas y se conforma el "puente" colocando dos resistencias fijas R_3 y R_4 del mismo valor, entonces:

$$\Delta R_3 = \Delta R_4 = 0$$

de donde:

$$e = \frac{E_i}{4} \left[2 \frac{\Delta R}{R} \right] = \frac{E_i}{2} \frac{\Delta R}{R}$$

$$e = \frac{1}{2} E_i k\varepsilon$$

siendo este el voltaje de salida para el llamado **Medio Puente**.

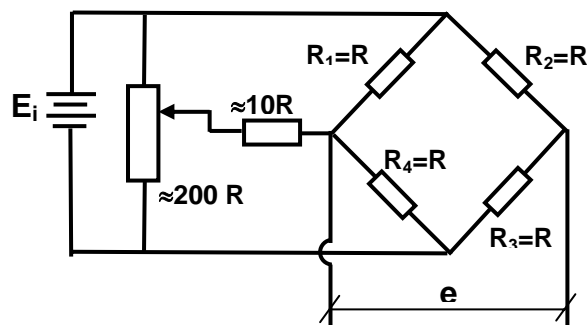
Si se emplean cuatro extensómetros $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, donde dos de ellos varían positivamente ($\Delta R_1, \Delta R_3$) y los otros dos negativamente ($\Delta R_2, \Delta R_4$), entonces:

$$e = \frac{E_i}{4} \left[4 \frac{\Delta R}{R} \right] = E_i \frac{\Delta R}{R}$$

$$e = E_i k\varepsilon$$

correspondiendo este voltaje de salida al llamado **Puente Completo**.

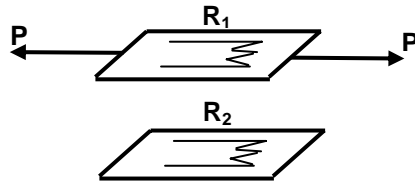
Aunque se han considerado que las cuatro resistencias del **Puente** son iguales, esto resulta prácticamente imposible, por ello se necesita utilizar un circuito de balanceo, como el que se muestra a continuación, cuando el puente es alimentado con corriente directa. Resulta importante



Destacar que este circuito no afecta la ecuación básica que se obtuvo para determinar el voltaje de salida en el **Puente de Wheatstone**.

Como se puede observar el voltaje de salida e del puente es proporcional al producto $E_i k \epsilon$, por lo que su valor es pequeño y se hace necesario amplificar la señal e mediante **amplificadores**, generalmente de ganancia, $G \approx 2000$, obteniendo así un voltaje de salida amplificado $e_0 = Ge$, el cual puede ser medido en voltímetros, oscilógrafos, etc. o visualizado en osciloscopios u oscilógrafos.

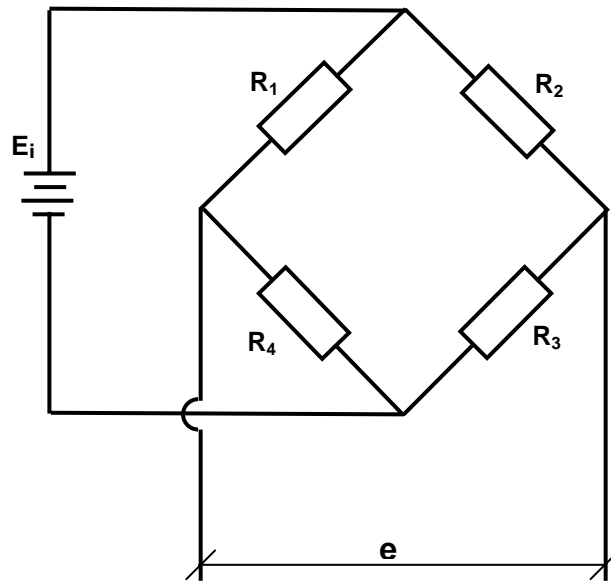
Desafortunadamente, en la mayoría de los casos, las variaciones de las dimensiones de un cuerpo se deben a la acción simultánea de las fuerzas externas y las cargas térmicas, por lo que se hace necesario la eliminación del efecto de estas últimas, lo cual se logra mediante un proceso de **compensación**, como el que se muestra seguidamente. De tal forma que si a la pieza sometida a



cargas y a deformaciones térmicas se le fija un extensómetro R_1 y a otra pieza del mismo material, pero no sometida a cargas se le fija un extensómetro R_2 , debiendo tener esta segunda pieza el mismo régimen térmico que la primera, entonces:

$$\Delta R_1 = \Delta R_{1\text{CARGA}} + \Delta R_{1\text{TÉRMICO}}$$

$$\Delta R_2 = \Delta R_{2\text{TÉRMICO}} = \Delta R_{1\text{TÉRMICO}}$$



Como R_3 y R_4 son resistencias fijas, el voltaje de salida será.

$$e = \frac{E_i}{4} \left[\frac{\Delta R_1}{R} - \frac{\Delta R_2}{R} \right]$$

$$e = \frac{E_i}{4} \left[\frac{\Delta R_{1CARGA} + \Delta R_{1TÉRMICO}}{R} - \frac{\Delta R_{2TÉRMICO}}{R} \right]$$

$$e = \frac{E_i}{4} \frac{\Delta R_{1CARGA}}{R} = \frac{1}{4} E_i k \varepsilon$$

De esta forma se elimina el efecto térmico.

Otro método de compensación consiste en conformar el Puente Completo, de tal forma que desde el punto de vista térmico:

$$\Delta R_{1TÉRMICO} = \Delta R_{2TÉRMICO} = \Delta R_{3TÉRMICO} = \Delta R_{4TÉRMICO}$$

Por lo tanto:

$$e_{TÉRMICO} = \frac{E_i}{4} \left[\frac{\Delta R_{1TÉRMICO}}{R} - \frac{\Delta R_{2TÉRMICO}}{R} + \frac{\Delta R_{3TÉRMICO}}{R} - \frac{\Delta R_{4TÉRMICO}}{R} \right]$$

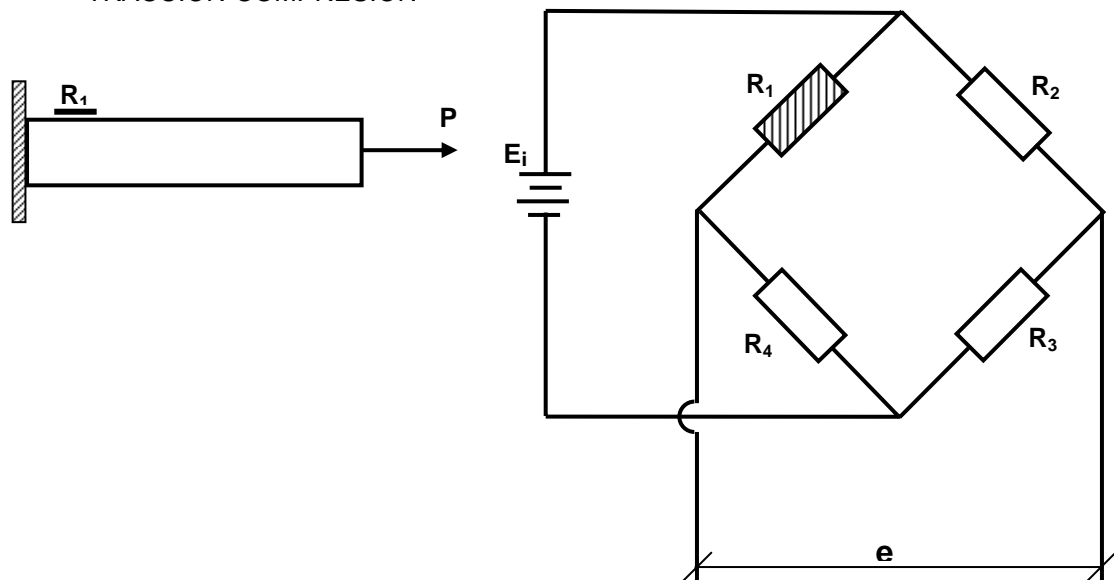
$$e_{TÉRMICO} = 0$$

Logrando de esta manera la Autocompensación Térmica.

5.4.- Conexiones para la determinación de los esfuerzos generados por las diferentes acciones internas.

A continuación se mostrarán las formas típicas de fijar los extensómetros y la instalación de los extensómetros en el Puente para determinar los esfuerzos en los estados típicos de: **tracción-compresión, flexión, torsión.**

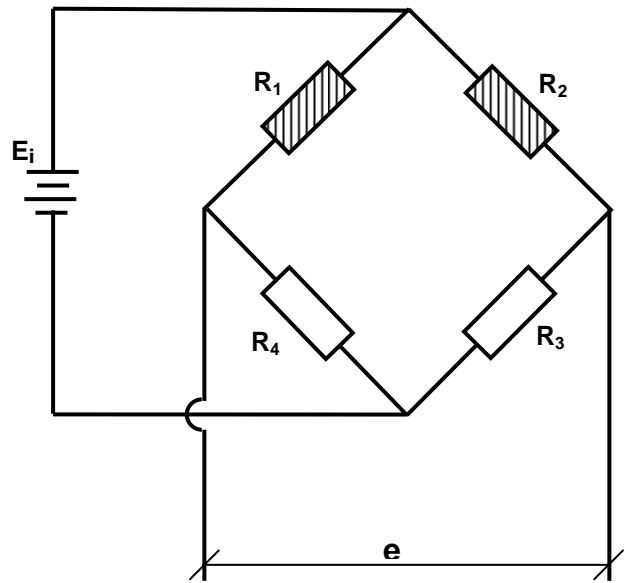
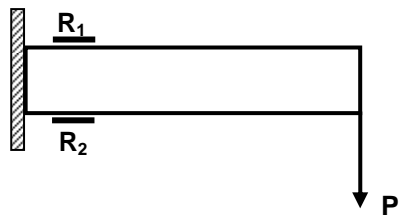
TRACCIÓN-COMPRESIÓN



Una vez leída la lectura de la deformación se puede obtener la magnitud del esfuerzo normal σ a partir de la Ley de Hooke, ya que:

$$\sigma = E \varepsilon$$

FLEXIÓN

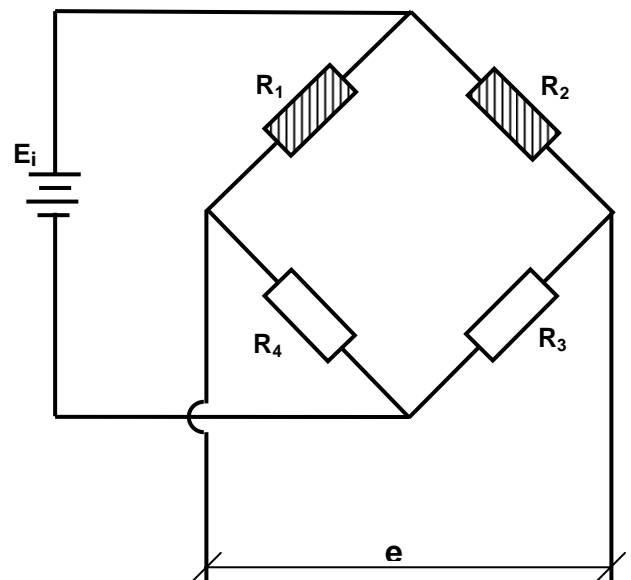
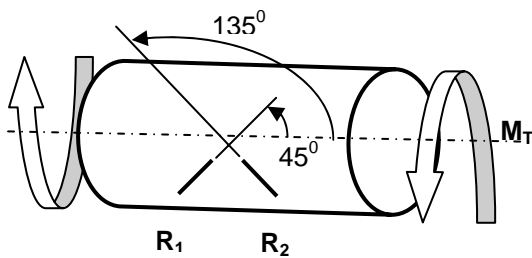


En este caso la lectura de la deformación será el doble de la deformación real, por tanto se requiere dividir por dos el valor de la lectura para obtener la deformación real ϵ y con ésta es posible determinar, mediante la Ley de Hooke, el esfuerzo normal σ , pues:

$$\sigma = E\epsilon$$

Se observa que en esta instalación se alcanza un doble grado de sensibilidad, además de lograr la compensación térmica.

TORSIÓN



Para la instalación mostrada el registrador dará directamente la diferencia entre las deformaciones a 45° y 135° , es decir, $\epsilon_{45} - \epsilon_{135}$. Como se verá más adelante el esfuerzo tangencial τ , actuante en la periferia de la pieza será:

$$\tau = G\gamma$$

donde, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

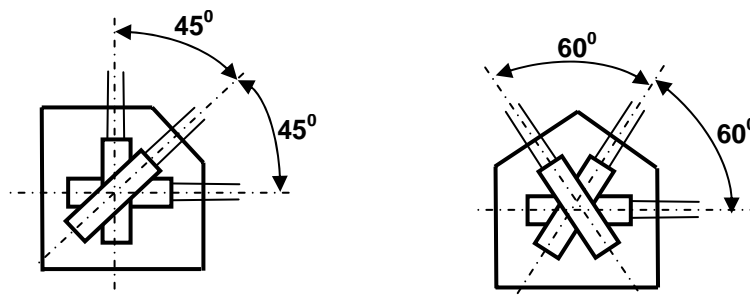
$$\gamma = [2\varepsilon_{45^\circ} - (\varepsilon_{45^\circ} + \varepsilon_{135^\circ})]$$

$$\gamma = \varepsilon_{45^\circ} - \varepsilon_{135^\circ}$$

$$\tau = \frac{E}{2(1+\nu)} (\varepsilon_{45^\circ} - \varepsilon_{135^\circ})$$

Como se ha visto en todos los casos analizados se conocía de antemano la dirección de los esfuerzos principales, por lo que se conocía la dirección en que había que fijar los extensómetros para obtener las deformaciones principales, pero como no siempre se conoce a priori la dirección de los ejes principales es por ello que a continuación se mostrará la técnica a seguir para la colocación de los extensómetros cuando se desconocen las direcciones de los ejes principales del estado tensional plano.

Cuando se desconocen las direcciones de los esfuerzos principales, el estado tensional plano quedará totalmente determinado si se conocen las deformaciones lineales ε en tres direcciones cualesquiera, para ello se emplean las denominadas **rosetas**, siendo las más frecuentemente utilizadas las de 45° y 60° .



Para determinar las deformaciones principales, ε_1 , ε_2 es necesario conocer las deformaciones ε_x , ε_y y la distorsión γ_{xy} que se determinan de la ecuación:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_x \cos^2 \alpha_i + \varepsilon_y \sin^2 \alpha_i + \gamma_{xy} \sin \alpha_i \cos \alpha_i$$

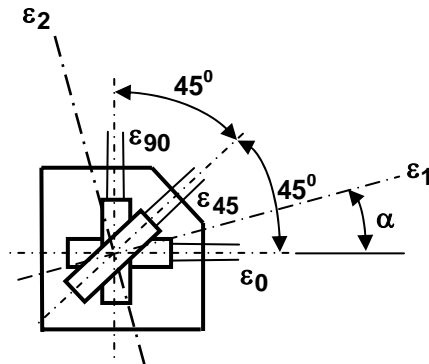
Así,

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

siendo la dirección de la deformación principal ε_1 la obtenida a partir de la expresión:

$$\tan 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

Aplicando las expresiones mostradas al caso de la **roseta de 45°** se tendrá:



$$\varepsilon_0 = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{90^\circ} = \varepsilon_y$$

Así:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{90^\circ}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45^\circ} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_{90^\circ})$$

Sustituyendo estos valores en la expresión de $\varepsilon_{1,2}$ se obtendrá:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90^\circ}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{90^\circ}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_{45^\circ} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_{90^\circ})}{2}\right)^2}$$

O sea,

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 + \varepsilon_{90^\circ} \pm \sqrt{2} \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{45^\circ})^2 + (\varepsilon_{45^\circ} - \varepsilon_{90^\circ})^2} \right]$$

La dirección de la deformación principal ε_1 se obtendrá de la expresión:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\varepsilon_{45^\circ} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_{90^\circ})}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{90^\circ}}$$

Por último de la Ley de Hooke Generalizada se pondrán determinar los esfuerzos principales σ_1 y

σ_2 como se muestra a continuación.

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)$$

De forma similar se obtienen las expresiones de las deformaciones principales y sus direcciones para el caso de la **roseta de 60°**, las que se muestran a continuación.

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{60^\circ} = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{120^\circ} = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

Así:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{3}(2\varepsilon_{60^\circ} + 2\varepsilon_{120^\circ} - \varepsilon_0)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{3}(\varepsilon_{60^\circ} - \varepsilon_{120^\circ})$$


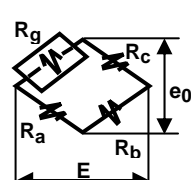
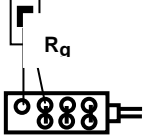
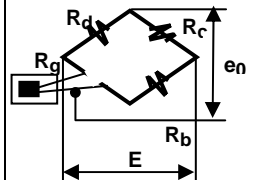
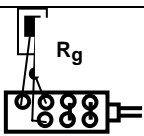
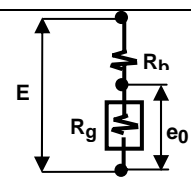
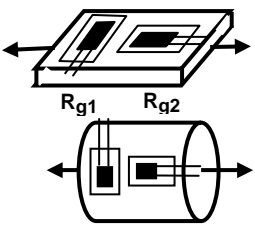
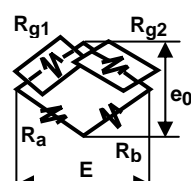
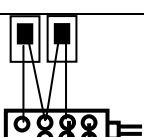
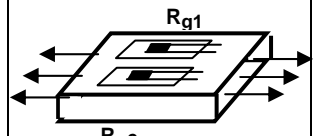
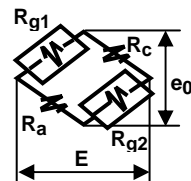
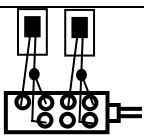
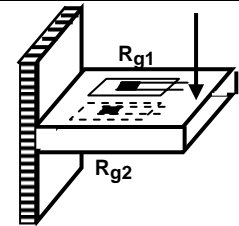
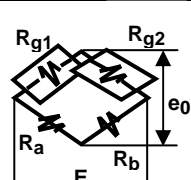
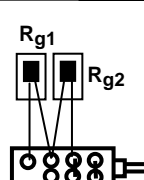
Sustituyendo en la expresión de las deformaciones principales $\varepsilon_{1,2}$ los valores anteriores se obtendrá:

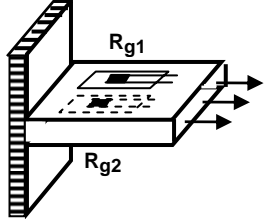
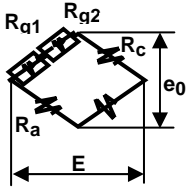
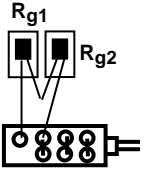
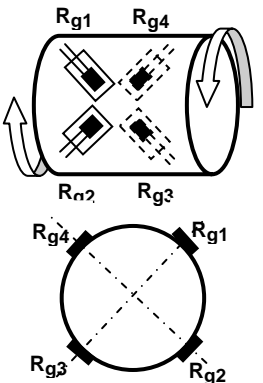
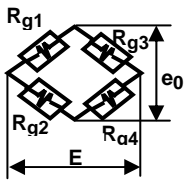
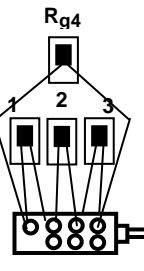
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{3} \left[\varepsilon_0 + \varepsilon_{60^\circ} + \varepsilon_{120^\circ} \pm \sqrt{2} \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{60^\circ})^2 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{120^\circ})^2 + (\varepsilon_{60^\circ} - \varepsilon_{120^\circ})^2} \right]$$

Siendo la dirección de la deformación principal ε_1 :

$$\tan 2\alpha = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_{60^\circ} - \varepsilon_{120^\circ})}{2\varepsilon_0 - \varepsilon_{60^\circ} - \varepsilon_{120^\circ}}$$

Conexiones del Puento

No .	Ejemplo de Aplicación	Cant. de gages	Circuito	Salida	Recomend.	Conexión Con el Puento
1	 Esfuerzo de Tracción (Compresión y Tracción uniforme)	1		$e_0 = \frac{1}{4} k_s \epsilon_0 E$ k_s : Factor gage ϵ_0 : Deformación E : Voltaje entrada e_0 : Voltaje salida R_g : Resist. gage R_a, R_b, R_c : Resist. fijas	Propio para cambios de temperaturas ambientales pequeños	
2	IDEM	1		$e_0 = \frac{1}{4} k_s \epsilon_0 E$		
3	IDEM	1		$e_0 = \frac{R_g R_b}{R_g + R_b} k_s \epsilon_0$ R_b : Resistencia Balast.	Propio principalmente para gage semiconductor, cuando la temperatura ambiental cambia poco	—
4	 IDEM	2		$e_0 = \frac{1+\nu}{4} k_s \epsilon_0 E$ ν : Coef. de Poisson R_{g1} : Resistencia gage, deform. ϵ_0 . R_{g2} : Resistencia gage, deform. $-\nu\epsilon_0$	Salida: (1+ν) veces Compensa temperatura	
5	 IDEM	2		$e_0 = \frac{1}{2} k_s \epsilon_0 E$ R_{g1} : Deform. ϵ_0 R_{g2} : Deform. ϵ_0	Salida doble. Compensa temperatura	
6	 Esfuerzo de Flexión	2		$e_0 = \frac{1}{2} k_s \epsilon_0 E$ R_{g1} : Deform. Flexión ϵ_0 R_{g2} : Deform. Flexión $-\epsilon_0$	Salida doble. Compensación térmica. Esfuerzos a tracción o compresión se anulan.	

7	 <p>Esfuerzo de Tracción (Compresión y Tracción uniforme)</p>	2		$e_0 = \frac{1}{4} k_s \varepsilon_0 E$ <p>Rg1: ...Deform. ε_0 Rg2: ...Deform. ε_0</p>	Deformaciones en flexión se anulan	
8		4		$e_0 = k_s \varepsilon_0 E$ <p>Rg1, Rg3: ...Deform. Torsion ε_0 Rg2, Rg4: ...Deform. Torsion - ε_0</p>	Salida cuádruple Compensación térmica Esfuerzos a flexión se anulan	

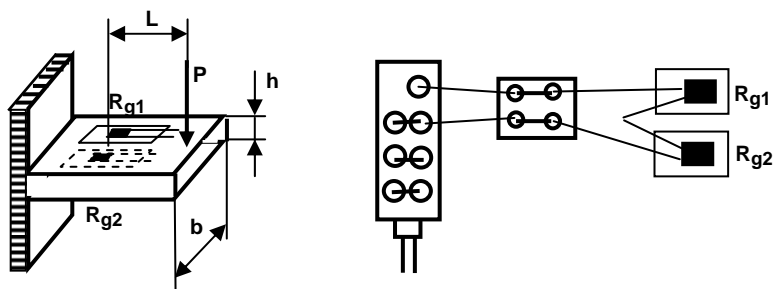
CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN A PARTIR DE LA LECTURA DEL AMPLIFICADOR

$$\varepsilon = \frac{\text{Lectura del Amplificador}}{\# \text{ de extensómetros}} * \frac{2}{k_{prom.}}$$

de extensómetros: Se suman si también lo hacen las deformaciones.

$k_{prom.}$: Factor promedio de los extensómetros utilizados.

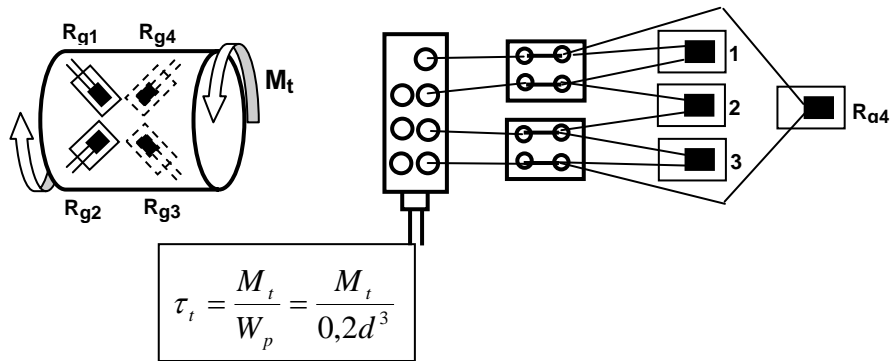
Conexiones y cálculo del esfuerzo teórico, σ_t y experimental σ_e , en el caso de la flexión.



$$\sigma_t = \frac{M_f}{W} = \frac{PL}{bh^2} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\sigma_e = E\varepsilon = E \frac{\text{Lect. Amp.}}{2} \cdot \frac{2}{k_{prom.}}$$

Conexiones y cálculo del esfuerzo teórico, τ_t y experimental τ_e , en el caso de la torsión.



De la Ley de Hooke Generalizada:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

pero como la Torsión genera un estado tensional plano, donde $\sigma_3 = 0$ y los restantes esfuerzos principales coinciden en magnitud con el valor del esfuerzo tangencial que provoca la torsión, es decir $\sigma_1 = \sigma_2 = \tau$.

Entonces:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} [\tau + \nu\tau] = \frac{\tau(1+\nu)}{E}$$

y finalmente:

$$\tau_e = \frac{E\varepsilon}{1+\nu} = \frac{E \frac{Lect. Amp.}{4} \frac{2}{k_{prom.}}}{1+\nu}$$

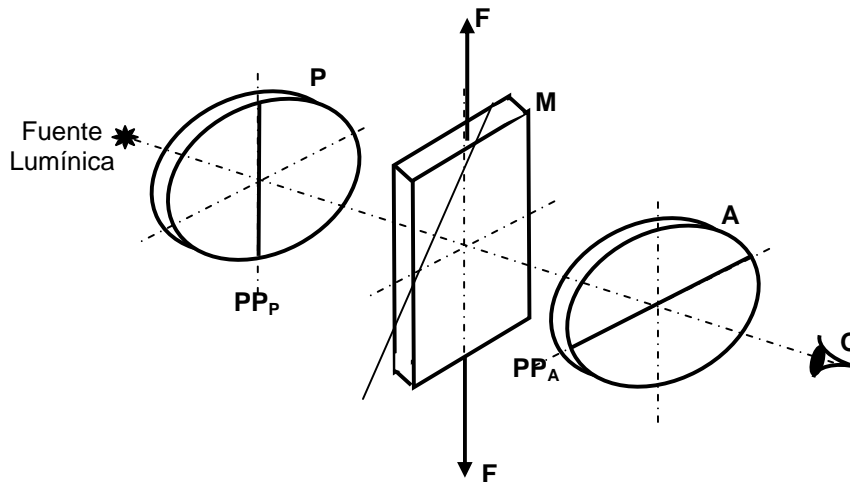
TEMA 6.- MÉTODO FOTOELÁSTICO.

Este método permite la determinación del estado tensional en modelos que posean las propiedades de transparencia, isotropía y birrefringencia temporal, bajo la acción de fuerzas externas, empleando así mismo para ello las leyes físicas de la Óptica. Entre los materiales utilizados para la construcción de los modelos se tienen: el vidrio, el celuloide, la gelatina, la bakelita, la fenolita y otros. La gelatina, dada su extraordinaria sensibilidad óptica, se emplea especialmente en el estudio de distribuciones tensionales provocadas por fuerzas de acción volumétrica, tales como el peso propio, sin embargo es la bakelita el material más frecuentemente usado debido a su gran sensibilidad óptica y su fácil conformación.

A pesar de que la birrefringencia temporal que adquieren estos materiales bajo fuerzas externas fue descubierto en 1815, el método fotoelástico se comienza a aplicar ampliamente a principios del siglo pasado, cuando se comprobó que en la mayoría de los problemas planos el estado tensional no depende del módulo de elasticidad, E , ni del coeficiente de Poisson, ν , pudiendo de esta forma llevarse los resultados experimentales obtenidos en el modelo a la pieza real.

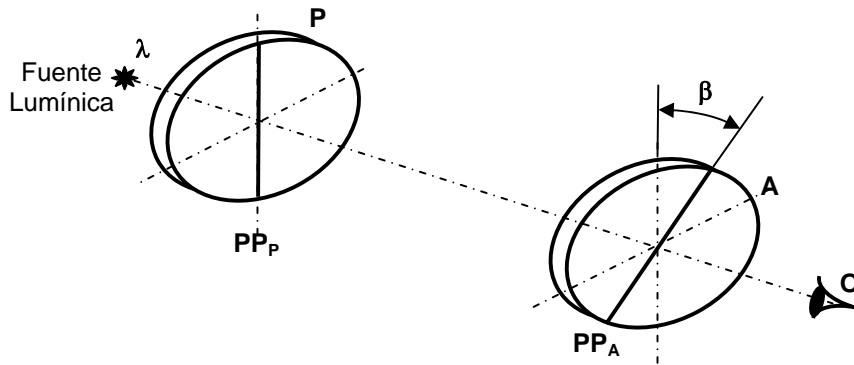
6.1.- Principio físico.

El principio que rige el método fotoelástico parte de la obtención de la luz polarizada por medio de un polaroide, denominado **polarizador P**, en determinado plano PP_P , cuya luz polarizada se hace incidir a través del **modelo M**, el que al encontrarse cargado desdobra el rayo polarizado en dos planos perpendiculares entre sí y que coinciden con las direcciones de los ejes principales en cada uno de los puntos que componen el modelo. Finalmente los rayos descompuestos por el modelo se hacen pasar por un segundo polaroide, que polariza los rayos en el plano PP_A , y que se denomina **analizador A**, ya que detrás de él se encuentra el **observador O**, como se muestra a continuación.



Cabe destacar que siempre los planos de polarización del polarizador, PP_P y el del analizador, PP_A , se encuentran perpendiculares entre sí o como frecuentemente se conoce "cruzados", de tal forma, que si a partir del esquema mostrado se quita el modelo o sencillamente éste no se encuentra cargado, el observador verá en el analizador un campo oscuro, sin embargo de encontrarse el modelo cargado y disponer de una fuente lumínica de luz natural, el observador verá un campo de franjas negras y coloreadas, denominándose las primeras **ISOCLINAS** y las coloreadas **ISOCROMAS**. Si la fuente lumínica es monocromática y se mantienen las condiciones anteriores, el observador verá un campo de franjas negras, **no** pudiendo diferenciar las isoclinas de las isocromas, por tener ambas la misma coloración negra.

Interpretando físicamente el fenómeno descrito, a partir de una fuente lumínica monocromática de longitud de onda λ y considerando que el plano de polarización del analizador forma un ángulo β con el polarizador, como se muestra en la figura.

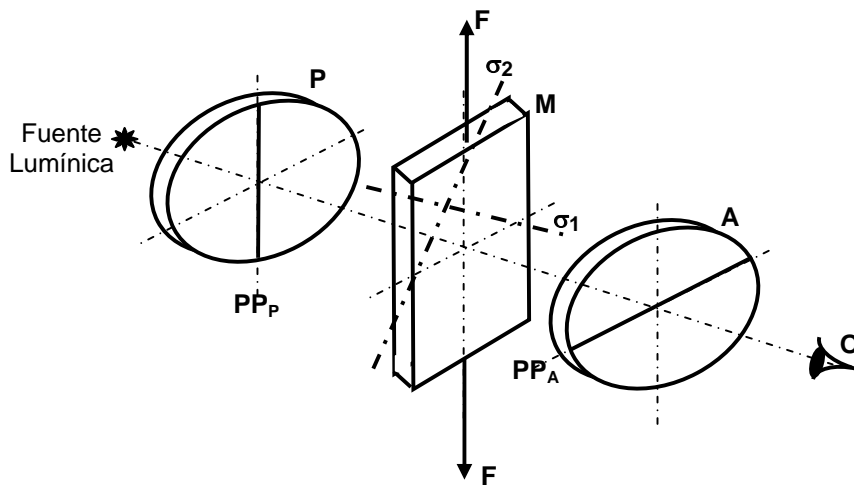


Entonces la intensidad lumínica I que detectará el observador será:

$$I = I_{\lambda} \cos^2 \beta \quad (6.1)$$

donde, I_{λ} es la intensidad lumínica de longitud de onda λ que pasa a través del polarizador P . De la expresión (6.1) se arriba a la conclusión de que si $\beta = \pi/2$ la intensidad lumínica $I = 0$ por lo que el observador verá un campo oscuro, como ya antes se había descrito cualitativamente.

Si ahora se mantiene la fuente lumínica monocromática y se coloca entre el polarizador P y el analizador A , ambos cruzados, el modelo cargado, como se muestra en la figura, al pasar los rayos



a través del polarizador incidirán en un punto cualquiera del modelo desdoblándose el plano de polarización en dos planos que coincidirán con las direcciones de los ejes principales, σ_1 , σ_2 y finalmente ambos planos de oscilación de las ondas en el modelo se compondrán en el plano de polarización del analizador. Al descomponer la luz monocromática polarizada en el modelo se producirá una diferencia de marcha δ_{λ} de los rayos, cuyos planos de oscilación coincidirán con los ejes principales, σ_1 , σ_2 del modelo, esta diferencia de marcha δ_{λ} de los rayos a través del modelo, se sabe de la Física que será:

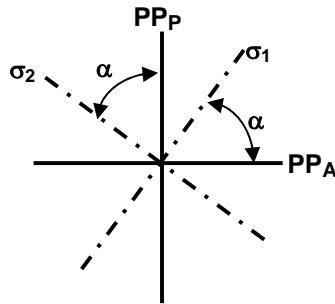
$$\delta_{\lambda} = C_{\lambda} t (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (6.2)$$

donde, C_{λ} es una constante que depende de las propiedades ópticas del material del modelo y de la longitud de onda utilizada.

t : es el espesor del modelo.

σ_1, σ_2 : son las magnitudes de los esfuerzos principales en el punto del modelo analizado.

Si el ángulo que forman el plano de polarización del polarizador, PP_P , y el plano de polarización del analizador, PP_A , con los ejes principales en el punto del modelo analizado se designa por la letra α , como se muestra a continuación.



Entonces:

$$I = I_{\lambda} \text{sen}^2 \frac{\delta_{\lambda}}{2} \text{sen}^2 2\alpha \quad (6.3)$$

donde, I : es la intensidad lumínica que pasa a través del analizador.

I_{λ} : es la intensidad lumínica de longitud de onda λ que pasa a través del polarizador.

α : es el ángulo que se forma entre las direcciones de los ejes principales y los planos de polarización del polarizador y el analizador.

De la fórmula (6.3) se observa que si $\text{sen } 2\alpha = 0$, la intensidad lumínica $I = 0$ debido a que los ejes principales coinciden con los planos de polarización de los polaroides, las franjas negras que cumplen con esta condición son las **isoclinas**, las que permiten determinar las direcciones de los ejes principales.

Sin embargo, la intensidad lumínica I también puede anularse si en la expresión (6.3):

$$\text{sen} \frac{\delta_{\lambda}}{2} = 0 \quad (6.4)$$

Si se sustituye la ecuación (3.2) en (3.4) se tendrá:

$$\text{sen} \frac{C_{\lambda} t}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = 0$$

cuya nulidad se produce cuando:

$$\frac{C_{\lambda} t}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = k_{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$$

y por lo tanto cuando se cumple:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n\pi}{k_{\lambda}}$$

también se producirá oscuridad a la salida del analizador en el punto correspondiente al modelo; la unión de todos estos puntos conformarán un conjunto de franjas negras conocidas como **isocromas**.

Todo lo anterior explica el porqué en presencia de luz monocromática, con el polarizador cruzado con el analizador y el modelo cargado, el observador verá un conjunto de franjas negras que conforman las **isoclinas** e **isocromas** y de hecho se está en condiciones de definir lo que se entiende por isoclinas e isocromas.

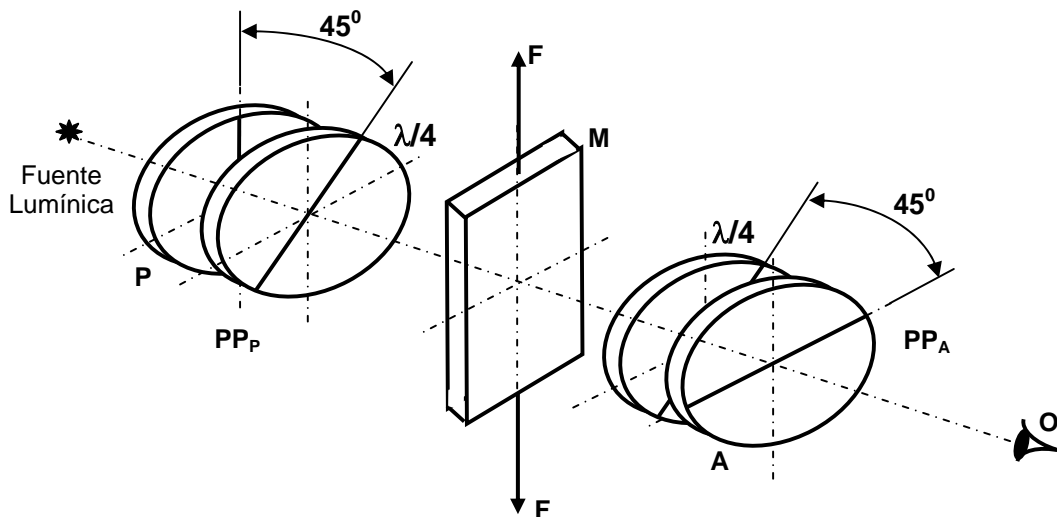
6.2.- Isoclinas e isocromas.

Se entiende por **isoclinas** aquellas franjas que unen los puntos del modelo cuyas direcciones de esfuerzos principales son las mismas y por **isocromas** aquellas franjas que unen los puntos del modelo cuya diferencia de esfuerzos principales coincide en magnitud, o sea $\sigma_1 - \sigma_2 = \text{cte}$. Así conociendo los parámetros de las **isoclinas**, es decir los ángulos α , que coincidirán con las direcciones de los ejes principales para los diferentes puntos que conforman el modelo, así como la diferencia de los esfuerzos principales, mediante las **isocromas**, se puede obtener el estado tensional para cualquier punto del modelo analizado.

6.3.- Técnica y procedimiento para determinar los esfuerzos en una pieza.

El primer problema a resolver es diferenciar las **isoclinas** de las **isocromas** y poder de esta forma las propiedades que brindan ambas.

Para fijar las isocromas y eliminar las isoclinas se emplea una fuente lumínica monocromática y las llamadas **láminas de cuarto de onda**, $\lambda/4$, las que se colocan, una detrás del polarizador y antes del modelo y la otra después del modelo y antes del analizador, formando ambas láminas de cuarto de onda 45° con las direcciones de los planos de polarización del polarizador y analizador respectivamente, como se muestra a continuación.



De esta forma entre ambas láminas de cuarto de onda se logra la **polarización circular** y la eliminación de las isoclinas a causa de la pérdida de orientación de los planos de oscilación de los rayos durante la trayectoria entre dichos discos de cuarto de onda. Así, la magnitud de la intensidad lumínica a la salida del analizador para este caso se determina por la fórmula:

$$I = I_\lambda \text{sen}^2 \frac{\delta_\lambda}{2} \quad (6.5)$$

donde se observa que el factor $\text{sen}^2 2\alpha$, que determina la posición de las isoclinas, desaparece. De esta manera empleando **luz monocromática** y las **láminas de cuarto de onda**, el patrón de franjas que verá el observador corresponderá solamente a las **isocromas**.

Para estudiar adecuadamente el campo de las **isoclinas** existen diferentes técnicas, pero ninguna tan efectiva como la utilizada para obtener solamente las isocromas. Entre dichas técnicas se encuentran:

- Utilizar fuente lumínica natural, con el polarizador y el analizador cruzados, una vez cargado el modelo, el observador verá franjas negras y coloreadas, correspondiendo las franjas negras con las **isoclinas**.
- Utilizar luz natural con polarizador y analizador cruzados y empleando para el modelo un material de muy poca sensibilidad óptica y constante fotoelástica muy reducida, lo que permite aplicar cargas elevadas y obtener **isoclinas** finas, sin que aparezcan las isocromas.

Esta última técnica es la más ventajosa, aunque no siempre es posible obtener materiales para el modelo que cumpla con las propiedades descritas.

Seguidamente se expondrá la **metódica** para la **determinación de los esfuerzos** normales y tangenciales empleando el método fotoelástico.

- Se prepara el sistema óptico con el modelo cargado para determinar el campo de isocromas, utilizando como ya se explicó la luz monocromática y las láminas de cuarto de onda. Se fotografía el patrón de isocromas para la carga externa deseada, es importante tener en cuenta la escala de la fotografía respecto a las dimensiones reales del modelo.
- Se elimina el efecto de las láminas de cuarto de onda, utilizando un material de muy poca sensibilidad óptica y empleando luz natural se obtiene el campo de isoclinas para diferentes valores del ángulo α , parámetro de las isoclinas, estos valores del ángulo α se obtienen girando simultáneamente el polarizador y el analizador, ambos cruzados; se recomienda que las variaciones del ángulo sean de 5° o 10° . Para cada parámetro α de isoclinas se toman fotografías teniendo los mismos cuidados que para el caso de las isocromas.
- Se superponen en una imagen única las isocromas, para una carga externa dada, y las isoclinas para los diferentes ángulos α .
- Se pasa a determinar los esfuerzos tangenciales τ_{xy} en el modelo, sabiendo que:

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{sen} 2\alpha = \frac{n\sigma_0^{(m)}}{2} \text{sen} 2\alpha$$

donde, $\sigma_0^{(m)}$ se obtiene a partir de las siguientes expresiones:

$$\delta_\lambda = C_\lambda t (\sigma_1 - \sigma_2) = n\lambda \text{ (garantiza las franjas negras)}$$

$$\therefore \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n\lambda}{C_\lambda t} = n\sigma_0^{(m)}$$

$$\therefore \sigma_1 - \sigma_2 = n\sigma_0^{(m)}$$

donde, **n** es el orden de la franja isocroma.

Como se observa de la expresión del esfuerzo tangencial para determinar la magnitud de τ_{xy} se requiere obtener el valor de la constante $\sigma_0^{(m)}$ correspondiente al material del modelo. Para ello se construye una probeta del mismo material que la del modelo para

someterla a tracción, se selecciona la tracción por ser un estado tensional lineal, por lo que $\sigma_2 = 0$ y por lo tanto $\sigma_1 = n\sigma_0^{(p)}$; además en tracción, cuando aparece la isocroma, ésta es única provocando la oscuridad en toda la probeta, bajo la condición de luz monocromática y en presencia de láminas de cuarto de onda. Así, sometiendo paulatinamente la probeta a carga llegará el momento en que se oscurece, lo que indica que se ha alcanzado una isocroma, a partir de ese instante si se continúa aumentando la carga surgirá una nueva isocroma para un incremento de carga ΔP . Si se divide el incremento de carga, ΔP , necesario para pasar de una isocroma a la contigua, entre el área de la sección transversal de la probeta, se obtendrá:

$$\sigma_0^{(p)} = \frac{\Delta P}{A}$$

Si se desea mayor exactitud en el valor $\sigma_0^{(p)}$ se debe obtener el incremento de carga promedio ΔP_{prom} entre isocromas de tal forma que:

$$\sigma_0^{(p)} = \frac{\Delta P_{prom}}{A}$$

Pudiéndose determinar la constante, $\sigma_0^{(m)}$, correspondiente al modelo por la expresión:

$$\sigma_0^{(m)} = \frac{\sigma_0^{(p)} t^{(p)}}{t^{(m)}}$$

donde, $t^{(p)}$ es el espesor de la probeta, y $t^{(m)}$ es el espesor del modelo.

Así, para obtener la magnitud del esfuerzo tangencial en un punto cualquiera del modelo basta con definir el orden n de la isocroma que pasa por el punto en cuestión, el parámetro α correspondiente a la isoclima que pasa por dicho punto y conociendo la constante $\sigma_0^{(m)}$

se

puede hallar la magnitud del esfuerzo tangencial, τ_{xy} , a través de la fórmula:

$$\tau_{xy} = \frac{n\sigma_0^{(m)}}{2} \text{sen}2\alpha$$

- Se determinan los esfuerzos normales σ_x , σ_y en el modelo, para lo cual se puede seguir el procedimiento que se muestra a continuación.

De la Ley de Newton para el estado tensional plano:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0$$

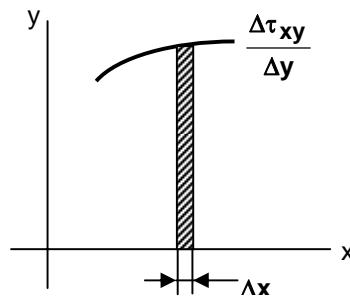
Integrando

$$\sigma_x = \sigma_x^{(0)} - \int_{x_0}^x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx$$

o sea:

$$\sigma_x = \sigma_x^{(0)} - \Delta \tau_{xy} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

al representar el término $\Delta \tau_{xy} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ el área bajo la curva $\frac{\Delta \tau_{xy}}{\Delta y}$, como se muestra a continuación.



Si por comodidad se toman los incrementos Δx y Δy iguales, entonces:

$$\sigma_x = \sigma_x^{(0)} - \Delta \tau_{xy} (\pm 1)$$

donde, $\sigma_x^{(0)}$ es el esfuerzo normal en la dirección del eje x, a partir del origen, cuyo origen se toma por conveniencia en el contorno libre de la pieza para facilitar su determinación.

Para determinar el esfuerzo σ_y se puede recurrir a la conocida expresión de los esfuerzos principales en el estado tensional plano:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

de donde:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\therefore \sigma_y = \sigma_x - \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_{xy}^2}$$

- Una vez obtenidos los esfuerzos normales σ_x , σ_y y el tangencial τ_{xy} en un punto cualquiera del modelo se pueden determinar los esfuerzos normales y tangencial correspondiente al punto en cuestión de la pieza real, mediante la expresión:

$$\sigma = \sigma^m \frac{d^m}{d} \cdot \frac{t^m}{t} \cdot \frac{P}{P^m}$$

donde, σ , σ^m es el esfuerzo.

d , d^m son las dimensiones lineales

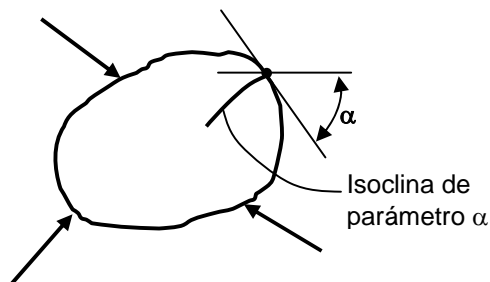
t , t^m es el espesor

P , P^m es la carga externa.

Indicando el supraíndice **m** que corresponde al modelo y cuando no existe el supraíndice corresponde a la pieza real.

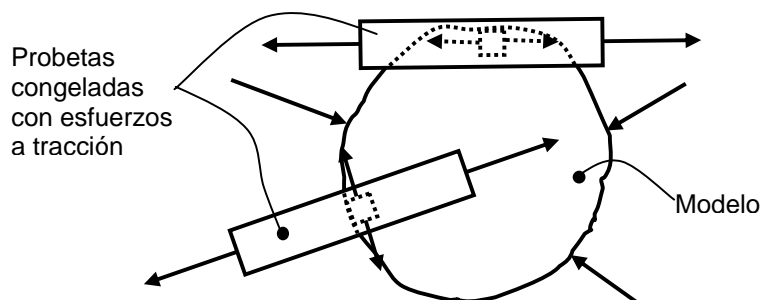
Seguidamente se mencionarán algunas **propiedades de las isoclinas** y la **técnica de compensación** que ayudan a interpretar el estado tensional del modelo y la pieza real.

- Si dos isoclinas se cortan en un punto indican que el punto tiene dos direcciones diferentes de ejes principales, lo cual es sólo posible si los esfuerzos actuantes sobre el mismo son nulos, es decir $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, en este caso el punto recibe la denominación de **punto ordinario o simple**.
- Si los esfuerzos principales son iguales en magnitud y del mismo signo, $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ sólo pasará una isoclina por el punto y el mencionado punto se denominará **punto isotrópico**.
- En los puntos ordinarios e isotrópicos el orden de la franja isocroma es igual a cero.
- En el contorno libre, como el mostrado, sólo podrán existir esfuerzos en la dirección



tangente al contorno, quedando definido el parámetro α de la isoclina por el ángulo que forma la tangente con la horizontal en el punto en cuestión.

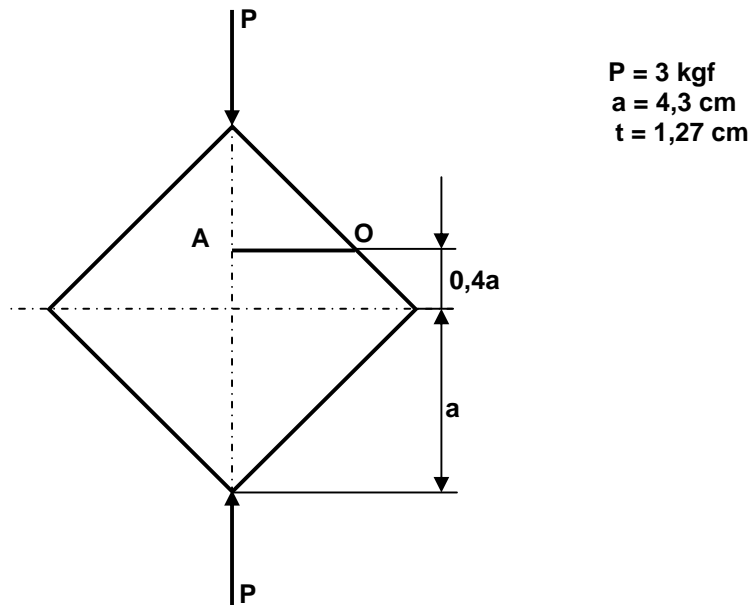
- El método de compensación consiste en congelar esfuerzos de tracción en una probeta de material con birrefringencia temporal, de tal forma, que al colocar la probeta sobre el modelo si algún punto del modelo se oscurece es debido a la propiedad de los puntos isotrópicos y se llega a la conclusión de que la magnitud del esfuerzo en ese punto del modelo coincide con la magnitud de los esfuerzos en la probeta. Este método permite determinar el signo de los esfuerzos en el contorno del modelo, ya que si se coloca la probeta tangente al contorno y se obtiene el punto isotrópico, el esfuerzo en el punto en cuestión, perteneciente al modelo, es de compresión; si el punto isotrópico se logra cuando la mencionada probeta es normal al contorno, entonces el esfuerzo en el punto en cuestión, perteneciente al modelo es de tracción, como se muestra a continuación.



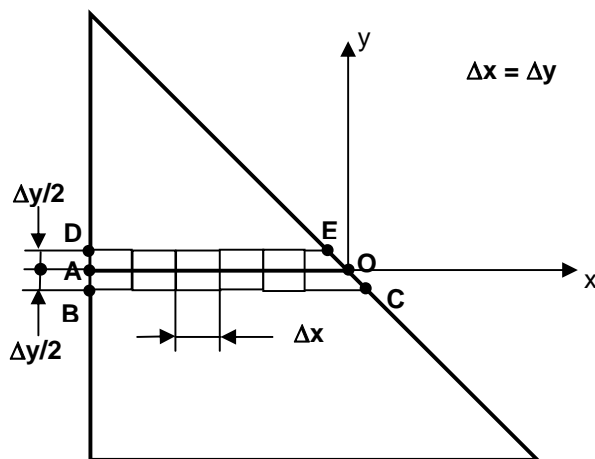
Es importante destacar que para lograr la compensación, basada en la búsqueda del punto isotrópico, es necesario utilizar la fuente lumínica natural y la polarización circular, esta última empleando láminas de cuarto de onda.

Ejemplo.

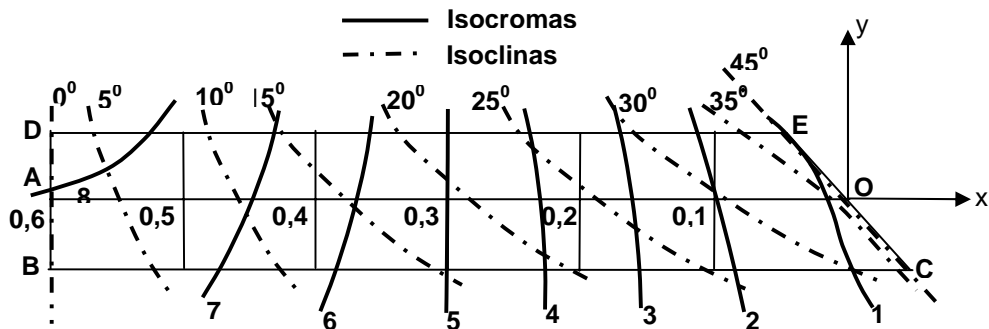
Con el objetivo de esclarecer la metodología de cálculo de los esfuerzos utilizando el método fotoelástico, seguidamente se desarrollará un ejemplo, tomando como modelo la figura que se muestra a continuación, se desea determinar la magnitud de los esfuerzos en los puntos de la recta **OA** que se encuentra a una distancia **0,4a** del eje de simetría horizontal de dicha figura.



- Dada la característica de simetría de la pieza analizada se toma el cuadrante superior derecho y se efectúa la división en intervalos Δx y Δy , como se muestra a continuación.



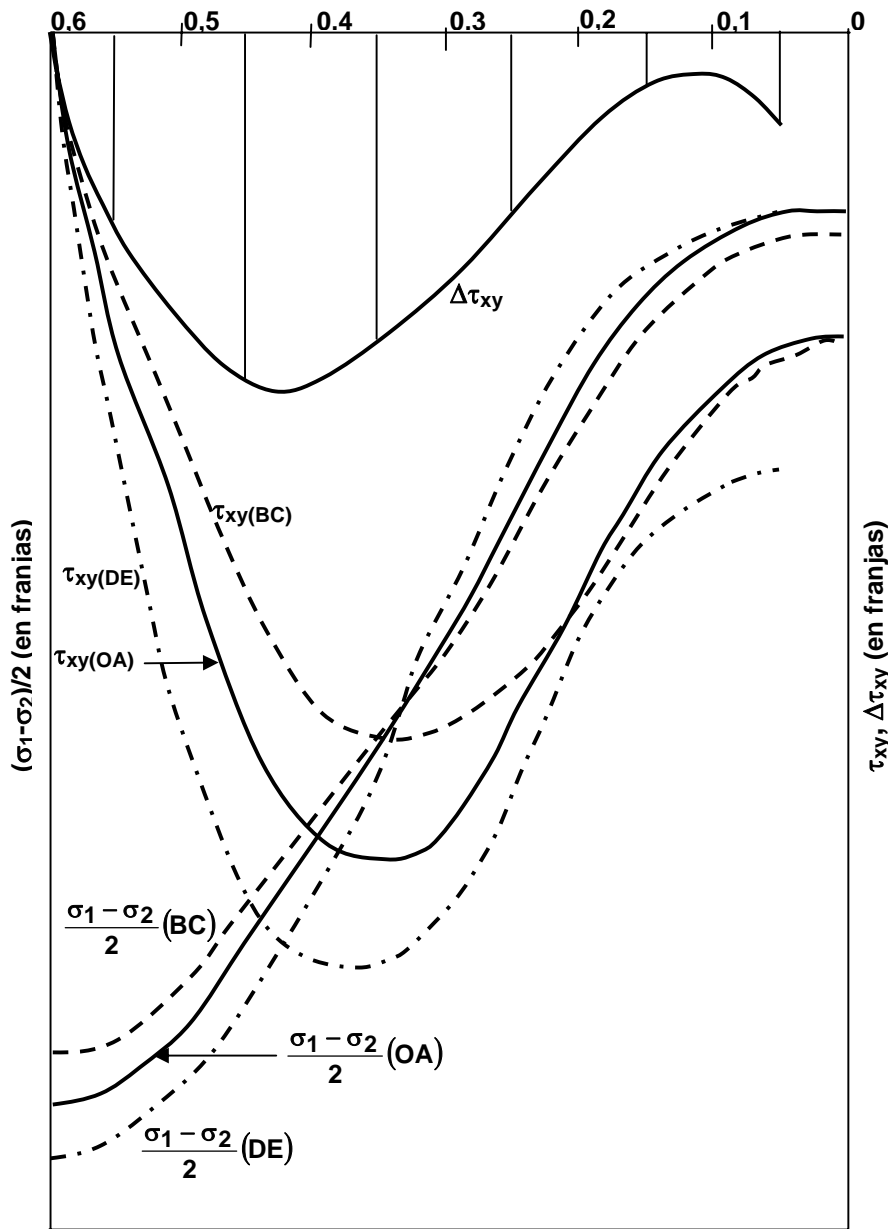
- Se efectúa una ampliación del trapecio **DBCE**, teniendo en cuenta la escala, y se identifican el orden de las isocromas y los parámetros de las isoclinas, como se muestra a continuación.



- Se identifican los puntos de intersección de las isoclinas e isocromas con las rectas DE, OA y BC con el objetivo de obtener las magnitudes de los correspondientes esfuerzos tangenciales, τ_{xy} , para lo cual es posible auxiliarse de la tabla mostrada, la que dará los esfuerzos en función de valores de franjas, n .

α	$\text{Sen}2\alpha$	B-C		D-E		O-A	
		$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{n}{2}$	τ_{xy}	$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{n}{2}$	τ_{xy}	$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{n}{2}$	τ_{xy}
0	0						
.
.
.
.
.
.
.
45°	1,00						

También para obtener los valores del esfuerzo tangencial τ_{xy} en cada una de las rectas DE, OA y BC se puede emplear el gráfico que se muestra seguidamente.



- Una vez graficadas las curvas de $\tau_{xy}(BC)$, $\tau_{xy}(OA)$ y $\tau_{xy}(DE)$ se obtiene el gráfico de $\Delta\tau_{xy}$, ya que:

$$\Delta\tau_{xy} = \tau_{xy}(DE) - \tau_{xy}(BC)$$

Además como este caso:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(DE) - \tau_{xy}(BC) &= + \\ \Delta y &= + \\ \Delta x &= - \end{aligned}$$

Entonces: $\Delta\tau_{xy} \frac{\Delta x}{\Delta y} = -$

- Obtenida la curva de $\Delta\tau_{xy}$ se determinan los valores de $\Delta\tau_{xy}$, correspondientes a los puntos medios de los intervalos de Δx , los que se designarán por $\Delta\tau_{xy}^{prom}$.
- Utilizando la tabla que se muestra a continuación se determinan en “valores de franjas” los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} correspondientes a la recta OA.

SECC.	$\Delta\tau_{xy}^{prom} \frac{\Delta x}{\Delta y}$	RECTA OA						
		σ_x	$\sigma_1 - \sigma_2 = n$	τ_{xy}	$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = n^2$	$4\tau_{xy}^2$	$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_{xy}^2}$	σ_y
0								
0,1								
.
.
0,6								

Donde: $\sigma_x = \sigma_x^{(0)} - \Delta\tau_{xy}(-1)$

Siendo $\sigma_x^{(0)}$ el valor del esfuerzo normal, correspondiente al punto de origen de coordenadas xy, que por comodidad se sitúa en el contorno de la pieza. Por supuesto la expresión de σ_x tiene carácter iterativo y por lo tanto el siguiente valor de $\sigma_x^{(0)}$ coincidirá con el anterior de σ_x .

$$\sigma_x^{(0)} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$\sigma_1 = 0$ por estar el punto O en el contorno libre de la pieza, el valor de σ_2 , tangente al contorno, se puede obtener por el método de compensación o el método extensométrico eléctrico.

A partir de los valores de σ_x se pueden determinar los valores de los esfuerzos, σ_y , utilizando la expresión:

$$\sigma_y = \sigma_x - \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_{xy}^2}$$

Es importante recordar que los valores obtenidos para los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} están en función de los “valores de franjas”, por lo tanto para obtener las magnitudes de los esfuerzos en unidades de fuerza por unidad de área se requiere multiplicar los “valores en franjas”, correspondientes a σ_x , σ_y y τ_{xy} por la constante del modelo, $\sigma_0^{(m)}$, donde:

$$\sigma_0^{(m)} = \frac{\Delta P_{\text{prom}} t(p)}{A t^{(m)}}$$

De esta forma, se obtendrán los valores σ_x^l, σ_y^l y τ_{xy}^l en fuerza por unidad de área para el modelo analizado, es decir:

$$\begin{aligned} \sigma_x^l &= \sigma_x \sigma_0^{(m)} \\ \sigma_y^l &= \sigma_y \sigma_0^{(m)} \\ \tau_{xy}^l &= \tau_{xy} \sigma_0^{(m)} \end{aligned}$$

TEMA 7.- FOTOSTRESS.

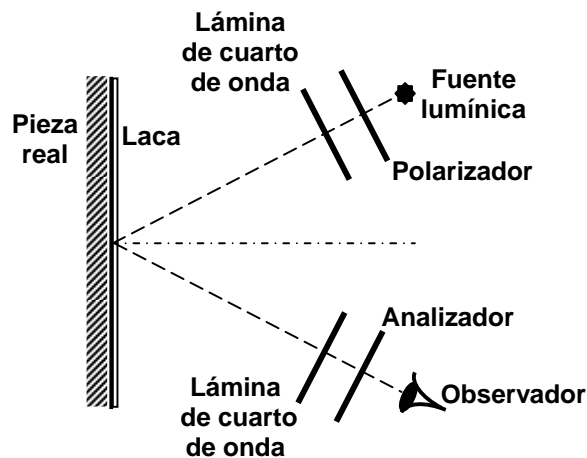
Los adelantos en la producción de materiales para construir modelos con la propiedad de la birrefringencia temporal bajo carga ha permitido obtener materiales sensibles en forma de láminas de distintos espesores, así como fundir modelos e incluso obtener sustancias líquidas adecuadas para recubrimientos y poder pintar a pistola.

Estos adelantos han brindado la posibilidad de ampliar las investigaciones fotoelásticas al estudio de construcciones reales, de manera tal, que la pieza analizada se cubre con una capa que bajo el efecto de la carga se transforma birrefringente permitiendo observar los fenómenos ópticos ya conocidos. Así se pueden determinar la magnitud de las tensiones en la capa contigua al cuerpo real y conociendo las propiedades mecánicas del material del cuerpo y de la laca obtener los esfuerzos en la pieza real objeto de estudio.

7.1.- Principio físico.

Como la birrefringencia no se puede observar en la laca por iluminación simple, ya que la pieza real no lo permite por no ser transparente, se utiliza la superficie de la pieza como elemento reflector, por lo que se requiere que la superficie de la pieza sea pulida antes de cubrirla con la laca sensible. Dicha laca se puede aplicar sobre la superficie pulida de la pieza por medio de brocha o pistola o se puede sumergir la pieza en un baño de laca.

Seguidamente se muestra el esquema de la disposición de los elementos que componen el sistema para la determinación de los esfuerzos por el método de **fotostress**.



Como se observa en el esquema las partes que componen el sistema son las mismas que se utilizan en el método fotoelástico, con la diferencia de que en este último la luz polarizada atraviesa el modelo y en el método de fotostress la luz polarizada se refleja en la superficie de la pieza real, lo que conlleva que la luz polarizada atraviesa la laca en dos oportunidades, una cuando llega a la superficie de la pieza real y otra cuando dicha superficie refleja la luz, por lo que todo lo estudiado en el método fotoelástico es extensible al método de fotostress, no obstante, se aprovechará la oportunidad para mostrar otra técnica, que consiste en la determinación de los esfuerzos a partir del estudio de las isocromas solamente.

7.2.- Técnica y procedimiento para determinar los esfuerzos en una pieza.

Aprovechando los conocimientos adquiridos en el método fotoelástico, los cuales son válidos para el método de fotostress y teniendo presente las diferencias señaladas entre ambos métodos se pasará a plantear directamente la **metódica** a seguir para la **obtención de los esfuerzos**, a partir del método de **fotostress**, abordando para ello la información que brindan solamente las isocromas.

1. Se escoge una probeta, preferiblemente del mismo material que el de la pieza real, y se le fija la misma laca sensible que se empleará sobre la pieza real.
2. Se le aplica carga a la probeta en tracción con la laca sensible ya fijada, utilizando luz monocromática y las láminas de cuarto de onda. A partir de la aparición de las isocromas, de acuerdo a su orden **n** se obtienen los correspondientes valores de carga **P** por unidad de área **A** de la sección transversal de la probeta, es decir: $\sigma^P = \frac{P}{A}$, pudiendo de esta forma construir el gráfico de **n** vs σ^P .
3. Para la misma probeta, con la laca sensible fijada, se construye el gráfico de esfuerzos contra deformaciones, o sea σ^P vs ε^P , pudiéndose, si la probeta es del mismo material que el de la pieza real, determinar el módulo de elasticidad del material de esta última.
4. Con los gráficos de **n** vs σ^P y σ^P vs ε^P se puede obtener el gráfico de **n** vs ε^P .
5. A partir del gráfico de **n** vs σ^P se puede hallar la constante σ^m , correspondiente a la laca:

$$\sigma^m = \frac{\sigma^P t^P}{n t^m}$$

donde, t^P : espesor de la probeta

n: orden de la isocromas

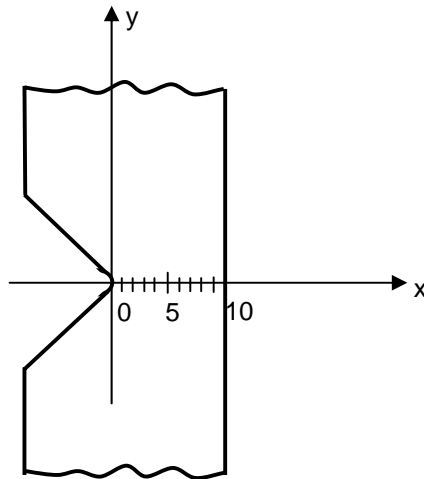
t^m : espesor de la laca

6. Del gráfico **n** vs ε^P se obtiene la constante ε^m de la laca:

$$\varepsilon^m = \frac{\varepsilon^P (1 + \nu^P) t^P}{n t^m}$$

donde, ν^P : coeficiente de Poisson del material de la probeta.

7. **Con luz monocromática, empleando las láminas de cuarto de onda, como se mostró en el esquema del epígrafe anterior, y fijando la laca sensible a la pieza real cargada, se determinan, aplicando la técnica explicada en el método fotoelástico, las trayectorias de las isocromas para la carga aplicada.**
8. Para los puntos de la pieza real, donde se desean determinar la magnitud de los esfuerzos, del punto 0 al punto 10, como se muestra en la figura, se halla el orden **n** de las isocromas, correspondientes a los puntos analizados.

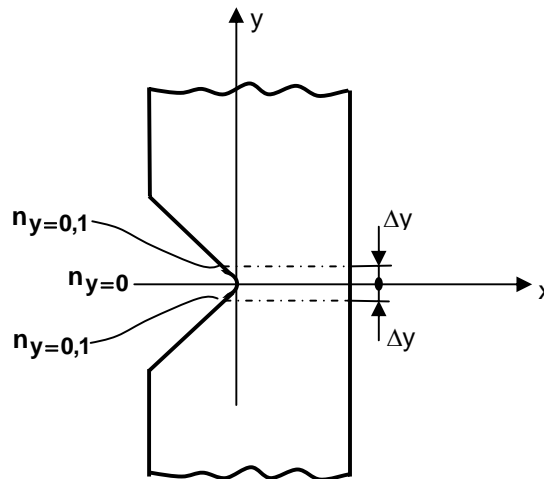


9. Se construye el gráfico de n vs x , en el caso analizado para $y=0$, si se desean determinar los valores de esfuerzos en otros puntos, se tomará el valor de "y" correspondiente a los puntos de interés.

10. A partir del gráfico de n vs x , en el caso analizado para $y=0$, se determinan las variaciones:

$$\frac{\partial n}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.$$

11. Se halla la variación $\frac{\partial^2 n}{\partial y^2}$ para la recta en cuestión, $y=0$. Para ello se selecciona, por ejemplo un valor de intervalo $\Delta y = 0,1$, como se muestra a continuación, donde n_y



representa los valores del orden de las isocromas que pasando por los puntos analizados cortan a las rectas horizontales $y=0$; $y=0,1$; de forma tal que:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial y^2} = \frac{\frac{n_{y=0,1} - n_{y=0}}{\Delta y} - \frac{n_{y=0} - n_{y=0,1}}{\Delta y}}{\Delta y}$$

Si la recta donde se encuentran los puntos analizados, como es este caso, donde $y=0$, es un eje de simetría, entonces:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial y^2} = 2 \frac{n_{y=0,1} - n_{y=0}}{\Delta y^2}$$

12. Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right] \cos 2\varphi - \frac{b^2}{2n \cos 2\varphi} - [n \operatorname{sen} 2\varphi] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} b \varepsilon^m = 0$$

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y = n \varepsilon^m \cos 2\varphi$$

donde, $b \varepsilon^m = \frac{\partial \gamma}{\partial y}$, siendo γ la deformación angular

y φ el ángulo que define la dirección de los ejes principales medidos a partir del eje x.

La condición de simetría, así como las condiciones de contorno facilitan la solución de dichas ecuaciones, al igual que la utilización de los métodos numéricos, tal como el de Runge-Kutta.

a) Así si las deformaciones principales máximas son paralelas al eje de simetría, $\varphi = 0$, y entonces:

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right] - \frac{b^2}{2n}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^m} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} b$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x - n \varepsilon^m$$

b) Si las deformaciones principales máximas son normales al eje de simetría,

$\varphi = \frac{\pi}{2}$, y entonces:

$$\frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right] + \frac{b^2}{2n}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^m} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} b$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x + n\varepsilon^m$$

Para este caso en el cual hay simetría y $\varphi = \frac{\pi}{2}$ se tendrá:

$$\frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right] + \frac{b^2}{2n}$$

Con el objetivo de obtener la variación de **b** en función de **x** se aplica el método numérico de Runge-Kutta, para lo cual se elabora la tabla que a continuación se muestra.

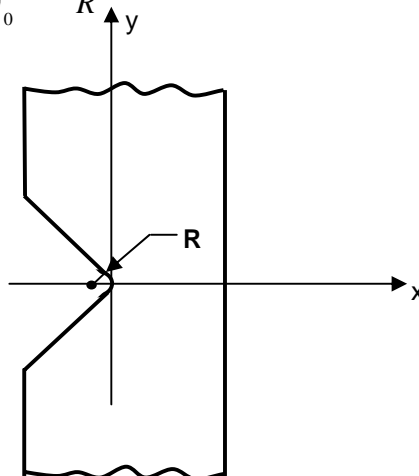
x	b	b ²	$\frac{1}{2n}$	$\frac{b^2}{2n}$	$-\frac{1}{2}(n_{yy} - n_{xx})$	$\frac{\partial b}{\partial x}$	$h \frac{\partial b}{\partial x}$	h = 0,1
x₀	b₀	-----	-----	-----	-----	-----	→ k ₁	k
x₀ + $\frac{h}{2}$	b₀ + $\frac{k_1}{2}$	-----	-----	-----	-----	-----	→ k ₂	
x₀ + $\frac{h}{2}$	b₀ + $\frac{k_2}{2}$	-----	-----	-----	-----	-----	→ k ₃	
x₀ + h	b₀ + k₃	-----	-----	-----	-----	-----	→ k ₄	
x₁ = x₀ + h	b₁ = b₀ + k	-----	-----	-----	-----	-----	→ k ₁	k
.	.	-----	-----	-----	-----	-----	→ .	
.	.	-----	-----	-----	-----	-----	→ .	
.	.	-----	-----	-----	-----	-----	→ .	

Donde: $k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$b_0 = -2 \left[n_0 \left(\frac{d^2_x}{dy^2} \right)_0 + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\tau_n}{\varepsilon^m} \right)_0 \right]$$

siendo, **n₀**, el orden de la isocroma correspondiente al punto 0.

$$\left(\frac{d^2_x}{dy^2} \right)_0 = -\frac{1}{R}, \text{ ya que en este caso,}$$



$$y^2 + (x+R)^2 = R^2$$

$$\therefore \left(\frac{d^2_x}{dy^2} \right)_0 = \frac{1}{R}$$

$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\tau_n}{\varepsilon^m} \right)_0 = 0$, ya que el esfuerzo tangencial τ_n a lo largo del contorno en el punto 0 es nulo.

$n_{yy} = \frac{\partial^2 n}{\partial y^2}$ cuya magnitud se obtiene a partir del paso No. 11, para el punto correspondiente a la pieza real.

$n_{xx} = \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ cuya magnitud se obtiene aplicando el paso No. 10, para el punto correspondiente a la pieza real.

13. Se construye el gráfico de **b** vs **x**.

14. Se resuelve la ecuación:

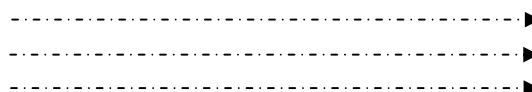
$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} b \varepsilon^m = 0$$

que en el presente caso por ser $\varphi = \frac{\pi}{2}$ se transforma en:

$$\frac{1}{\varepsilon^m} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} b$$

para la solución de esta ecuación se puede emplear el método de Runge-Kutta, realizando la tabulación que se muestra a continuación.

x	$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon^m}$	$\frac{\partial n}{\partial x}$	b	$-\frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial n}{\partial x}$	$-\frac{1-\nu}{2(1+\nu)} b$	$\frac{1}{\varepsilon^m} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}$	$\frac{h}{\varepsilon^m} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}$	h = 0,1
x_0	$\left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon^m} \right)_0$	----->						k₁
$x_0 + \frac{h}{2}$	$\left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon^m} \right)_0 + \frac{k_1}{2}$	----->						k₂
$x_0 + \frac{h}{2}$	$\left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon^m} \right)_0 + \frac{k_2}{2}$	----->						k₃
$x_0 + h$	$\left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon^m} \right)_0 + k_3$	----->						k₄
$x_1 = x_0 + h$	$\left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon^m} \right)_1 = \left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon^m} \right)_0 + k$	----->						k₁



.	.						.	k
.	.						.	
.	.						.	
.	.						.	

Donde:
$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon^m} \right)_0 = \frac{1-\nu}{E} \left(\frac{\sigma_n}{\varepsilon^m} \right)_0 - \frac{\nu}{1+\nu} n_0$$

siendo, σ_n , el esfuerzo normal al contorno en el punto 0 de la pieza y cuyo valor se puede obtener de la expresión:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{E}{1+\nu} \frac{n\varepsilon^m}{C}$$

siempre y cuando uno de los esfuerzos sea nulo.

De tener dos esfuerzos se puede emplear un extensómetro eléctrico para determinar uno de los esfuerzos y el otro esfuerzo se puede obtener utilizando la fórmula mostrada anteriormente, teniendo en cuenta que:

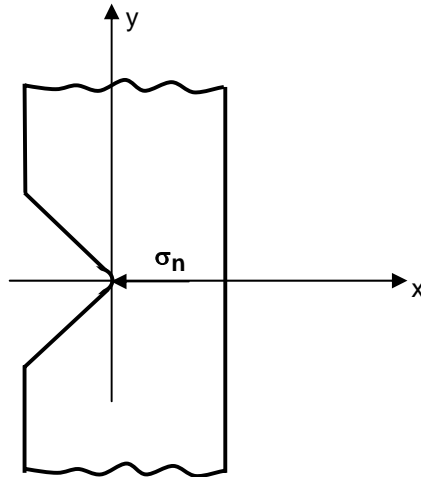
E: es el módulo de elasticidad del material de la pieza real.

ν : es el coeficiente de Poisson del material de la pieza real.

C: es un coeficiente experimental que depende del tipo de material de la pieza real, del tipo de carga a que esté sometida la pieza real, tracción, flexión, etc., y de la relación entre el espesor de la laca sensible, t^m y el espesor de la pieza real, t , o

sea $\frac{t^m}{t}$.

En el caso analizado $\sigma_n = 0$ debido a las condiciones de contorno, como se muestra en la figura.



15. Se construye el gráfico de $\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon^m}$ vs x .

16. Utilizando la expresión del paso No. 12, $\varepsilon_x - \varepsilon_y = n\varepsilon^m \cos 2\varphi$, se puede obtener $\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon^m}$,

como en el caso analizado $\varphi = \frac{\pi}{2}$, entonces:

$$\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon^m} = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon^m} + n$$

17. Con los valores de $\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon^m}$ y $\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon^m}$ se pueden determinar los valores de los esfuerzos normales σ_x y σ_y , a partir de las expresiones:

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon^m} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon^m} + \nu \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon^m} \right]$$

$$\frac{\sigma_y}{\varepsilon^m} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon^m} + \nu \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon^m} \right]$$

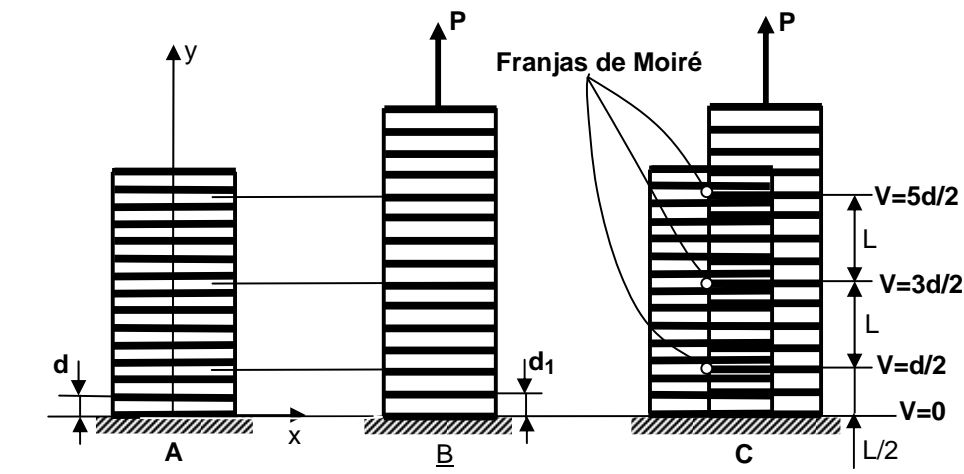
siendo, **E**: el módulo de elasticidad del material de la pieza real.
 ν : el coeficiente de Poisson del material de la pieza real.
 ε^m : la constante de la laca sensible, ver paso No. 6.

TEMA 8.-MÉTODO DE MOIRÉ.

Este método permite, a partir del estudio de los desplazamientos, obtener las deformaciones y con éstas, mediante la Ley de Hooke Generalizada, los esfuerzos.

8.1.- Principio físico e interpretación de las franjas de Moiré.

Para comprender el principio físico e interpretar las franjas de Moiré se estudiará el caso simple de un campo homogéneo de esfuerzos, como el caso de la tracción. Para poder determinar los desplazamientos se trazan primeramente sobre la superficie de la pieza a analizar se trazan rayas rectas equidistantes con un paso, $d = 0,1$ a $0,01$ mm, como se muestra en la figura A.



Posteriormente se somete la pieza a la acción de una fuerza axial de magnitud P , provocando el aumento del paso de las rayas a una distancia $d_1 > d$, como se observa en la figura B. Para determinar la deformación ϵ_y se coloca sobre la pieza traccionada un vidrio con el sistema de rayas idéntico al de la pieza sin deformar que se muestra en la figura A. Al superponer el vidrio sobre la pieza traccionada, ver figura C, se obtiene el patrón de Moiré mostrado, con un paso L mucho mayor que d y d_1 .

Como se sabe que:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

y como el caso analizado es un campo homogéneo de esfuerzos de tracción, entonces ϵ_y será un valor constante, por lo que:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v}{L}$$

donde v es el desplazamiento de cualquier sección transversal de la pieza que coincide con la correspondiente franja de Moiré y L la distancia desde el empotramiento hasta la correspondiente franja de Moiré. Así si se analiza, a partir del empotramiento, la segunda raya de la pieza deformada, la cual coincide con la primera franja de Moiré, se observa que dicha raya ha sufrido un desplazamiento, $v = \frac{d}{2}$, de tal forma que se puede establecer que $v = nd$, donde n es el número de orden de la franja de Moiré y d la distancia entre las rayas antes de la deformación de la pieza, por lo tanto, el número de orden de las franjas de Moiré adopta los valores fraccionarios $n = 0, 1/2,$

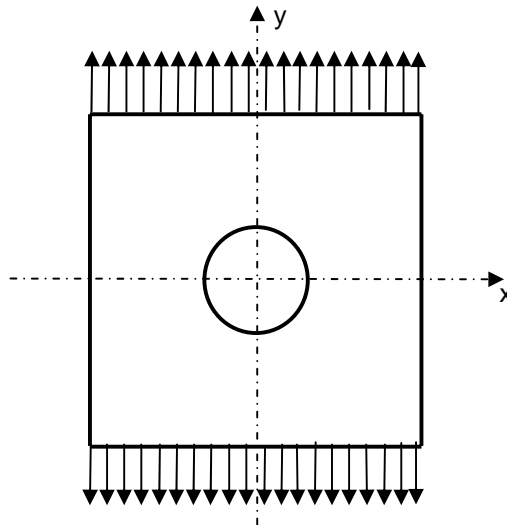
3/2 y **5/2**, como se muestra en la figura C. Finalmente, se arriba a la conclusión que para el caso analizado la deformación constante ϵ_y será:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v}{L} = \frac{\frac{d}{2}}{2d} = \frac{\frac{3d}{2}}{6d} = \frac{\frac{5d}{2}}{10d} = \frac{1}{4}$$

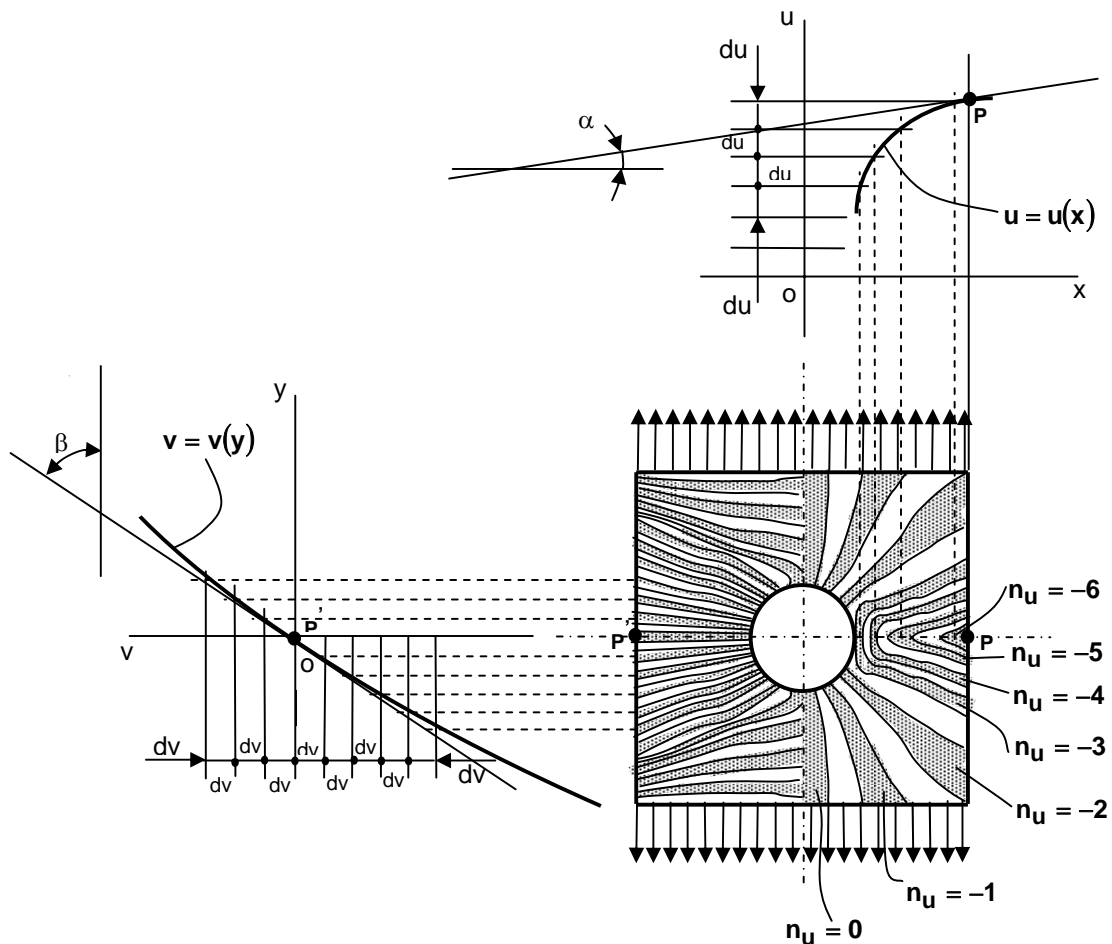
Cabe destacar que para el caso en que la deformación no es constante, sino que es función solamente de una de las coordenadas es decir, $\epsilon_y = f(y)$ las franjas de Moiré continuarán siendo paralelas al eje x, pero ya no serán equidistantes. Para el caso en que la deformación es función de ambas coordenadas, o sea, $\epsilon_y = f(x, y)$, el patrón de Moiré será un campo de franjas que no se intersecan, pero tampoco serán paralelas. A continuación se verá la técnica y procedimiento para la determinación de los esfuerzos en el caso general en que $\epsilon_y = f(x, y)$ y $\epsilon_x = f(x, y)$.

8.2.- Técnica y procedimiento para la determinación de los esfuerzos.

Para el caso general en que $\epsilon_y = f(x, y)$ y $\epsilon_x = f(x, y)$, siguiendo el procedimiento ya descrito para el caso de campo homogéneo de esfuerzos, se obtendrá el patrón de Moiré al superponer el vidrio rayado sobre la pieza rayada y cargada, las franjas de Moiré se caracterizarán por no intersecarse ni ser paralelas. Seguidamente se analizará la determinación de los esfuerzos, mediante el método de Moiré, para el caso de una placa con agujero, como la mostrada.



Aprovechando las condiciones de simetría se raya horizontalmente la mitad izquierda de la pieza con un paso **du** y verticalmente la mitad derecha con un paso **dv**, seguidamente se coloca sobre la pieza el vidrio rayado, el que coincidirá en la mitad izquierda y derecha con los respectivos pasos de raya **du** y **dv** practicados en la pieza. Una vez cargada la pieza se observará un cuadro de Moiré similar al mostrado.



A partir del campo de franjas se pueden determinar las deformaciones ε_x y ε_y correspondientes a un punto cualquiera P , siguiendo la metodología que se muestra a continuación.

- Para determinar la variación del desplazamiento horizontal u en función de la coordenada x , se selecciona la semirrecta horizontal que contiene al punto P .
- Se construye un sistema de ejes u , x , como el mostrado en la figura y se realizan un conjunto de divisiones du , cuyas divisiones representan el paso de las rayas practicadas en la pieza y que por conveniencia se aumenta su magnitud usando una escala k_2 , de tal forma, que si $du = 0,020 \text{ mm}$ y $k_2 = 0,002$, las divisiones de du , representadas en el dibujo serán de 10 mm , si la escala del dibujo $k_1 = 1$. Si las dimensiones de la pieza se reducen a la mitad, entonces $k_1 = 0,5$ y entonces las divisiones du representadas en el dibujo serán de 5 mm , para el mismo valor de $k_2 = 0,002$.
- Partiendo de la intersección de la línea media imaginaria de las franjas con la recta P y P' se proyecta hacia el gráfico de u vs x , cada proyección se diferencia de la anterior o posterior contigua en una magnitud du , ya que el desplazamiento de cada franja con relación a la anterior o posterior contigua es igual a du . Es importante recordar que al analizar un campo de desplazamientos homogéneos, el desplazamiento $u = n_u du$, donde

n_u es el número de orden de la franja, en este caso de la placa con agujero, como se observa en el dibujo, n_u es un número entero coincidiendo la franja $n_u = 0$ con el eje de simetría vertical, el signo negativo de n_u se debe a que el desplazamiento provocará deformaciones de compresión al estrecharse la placa en la dirección normal a la carga.

- Uniendo los puntos, producto de la intersección de la proyección de la línea media de cada franja con las rectas que definen las divisiones du , se obtiene la curva $u = u(x)$.
- Proyectando el punto P de la recta PP' hasta cortar la curva $u = u(x)$ se define un nuevo punto P , cuya pendiente a la curva en ese punto definirá el ángulo α .
- La metodología para la determinación del ángulo β coincide con la implementada para la obtención del ángulo α , con la única diferencia que la escala empleada para definir el paso dv de las rayas horizontales correspondientes a la mitad izquierda de la pieza será k_3 .
- Conociendo los factores de escala k_1 , k_2 , k_3 y los ángulos α y β correspondientes a las pendientes a las curvas $u = u(x)$ y $v = v(y)$ en los puntos P y P' se tendrá:

$$\varepsilon_x^P = -\tan \alpha \frac{k_2}{k_1}$$

$$\varepsilon_y^{P'} = \tan \beta \frac{k_3}{k_1} = \varepsilon_y^P \text{ (debido a la simetría de la pieza)}$$

ya que:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{du}{Lu} = \tan \alpha$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{dv}{Lv} = \tan \beta$$

- Obtenidas las deformaciones ε_x^P y $\varepsilon_y^{P'}$, correspondientes al punto P , se pueden determinar los esfuerzos σ_x^P , σ_y^P en dicho punto, aplicando la Ley de Hooke Generalizada para el caso del estado tensional plano.

$$\sigma_x^P = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^P + \nu \varepsilon_y^P)$$

$$\sigma_y^P = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y^P + \nu \varepsilon_x^P)$$

donde: E , es el módulo de elasticidad del material de la pieza
y ν , es el coeficiente de Poisson del material de la pieza.

Cabe destacar que en ocasiones la densidad de las rayas para obtener las franjas de Moiré no permiten obtener las deformaciones con precisión, requiriéndose entonces emplear la técnica del Moiré diferencial, que posibilita elevar la densidad del rayado, sin variar el estado deformacional de la pieza.

El estudio e interpretación de las franjas de Moiré sirven de base para la comprensión de la determinación de las deformaciones, a partir de la interferometría holográfica, empleando el rayo Láser.